풀이

STEP II 2012, 문제 2

순수수학 • 다항식의 합성

> **STEP II 2012, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q2

핵심 아이디어

합성(composition)하면 차수(degree)가 곱해지므로, p를 몇 번만 반복(iteration)해도 차수가 금세 너무 커져서 우변과 맞출 수 없게 된다. 차수를 비교하면 p의 차수가 정해지고, 그 다음에는 p를 미지의 계수(coefficient)로 써 놓으면 각 문항이 짧은 대수 계산으로 바뀐다. (ii)에는 깔끔한 지름길이 있다. $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 자체가 $\mathrm{p}(x)$에 대한 이차식(quadratic)이므로 좌변 전체가 $\mathrm{p}(x)$에 대한 이차식이 되고, 완전제곱식을 만들면(completing the square) 문제가 해결된다.

풀이

합성함수의 차수

$a_m, b_n \neq 0$이라 하고 $\mathrm{p}(x) = a_m x^m + \ldots$, $\mathrm{q}(x) = b_n x^n + \ldots$로 쓰자. $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = a_m[\mathrm{q}(x)]^m + a_{m-1}[\mathrm{q}(x)]^{m-1} + \ldots$에서 항 $a_m[\mathrm{q}(x)]^m$의 차수는 mn이고 최고차항의 계수(leading coefficient)는 $a_m b_n^m \neq 0$이며, 나머지 항의 차수는 모두 $(m-1)n < mn$ 이하이다($n \geq 1$일 때). 따라서 최고차항을 상쇄하는 항은 없고,

$$\deg \mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = mn.$$

($n = 0$이면 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x))$는 상수(constant)이고, 이때도 $mn = 0$이다.)

소문항 (i)

p의 차수를 m이라 하자.

$m \geq 2$이면 위의 결과에 의해 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)))$의 차수는 m^3이고, $3\mathrm{p}(x)$의 차수는 $m < m^3$이다.

따라서 좌변의 차수는 $m^3 \geq 8$인데, 우변 $-2x$의 차수는 1이다. 불가능하다.

$m = 0$이면 어떤 상수 c에 대해 $\mathrm{p}(x) = c$이고, 좌변은 상수 $c - 3c = -2c$가 되어 모든 x에 대해 $-2x$와 같을 수 없다. 불가능하다.

따라서 $m = 1$이다. $a \neq 0$인 $\mathrm{p}(x) = ax + b$로 쓰자. 그러면

$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b,$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$(a^3 - 3a)x + (a^2 + a + 1 - 3)b = -2x \quad \text{모든} x.$$

두 다항식(polynomial)이 모든 x에 대해 같으려면 계수가 모두 같아야 하므로

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \qquad \text{그리고} \qquad (a^2 + a - 2)\, b = 0.$$

$a = 1$이 첫 번째 식의 근이므로 첫 번째 식은 $(a - 1)^2(a + 2) = 0$으로 인수분해(factorise)되고, $a = 1$ 또는 $a = -2$를 얻는다. 두 번째 조건은 $(a - 1)(a + 2)b = 0$인데, 이 두 값에 대해서는 b가 무엇이든 자동으로 성립한다. 따라서 해는 정확히 다음과 같다.

$$\mathrm{p}(x) = x + b \qquad \text{그리고} \qquad \mathrm{p}(x) = -2x + b, \qquad b\text{는 임의의 상수.}$$

두 번째 해의 모임을 확인해 보자. $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 4x - b$이고 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = -8x + 3b$이므로, 좌변은 $-8x + 3b + 6x - 3b = -2x$이다.

소문항 (ii)

p의 차수를 m이라 하자. 좌변의 세 항의 차수는 각각 m^2, $2m$, m이다.

- $m \geq 3$이면 $m^2 > 2m > m$이므로 좌변의 차수는 $m^2 \geq 9 \neq 4$이다.
- $m = 1$이면 좌변의 차수는 2 이하이고, $m = 0$이면 좌변은 상수이다. 어느 쪽도 x^4과 같을 수 없다.

따라서 $m = 2$이다. (이때 $m^2 = 2m = 4$이므로 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$와 $3[\mathrm{p}(x)]^2$의 최고차항(leading term)은 차수가 같고, 그 계수를 확인해야 한다.)

$a \neq 0$인 $\mathrm{p}(x) = ax^2 + bx + c$로 쓰고, 쓰는 수고를 덜기 위해 P로 $\mathrm{p}(x)$를 나타내자.

> **생각해 보기** $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$를 정말 끝까지 전개해야 할까?

그럴 필요 없다. 정의에 의해 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = aP^2 + bP + c$이므로 좌변은

$$2(aP^2 + bP + c) + 3P^2 - 4P = (2a + 3)P^2 + (2b - 4)P + 2c,$$

로서 P에 대한 이차식이다. P^2의 최고차항은 a^2x^4이고 P의 차수는 2뿐이므로, 이 식의 x^4의 계수는 $(2a+3)a^2$이다. 이를 x^4과 비교하면

$$2a^3+3a^2-1=0, \qquad \text{즉,} \qquad (a+1)^2(2a-1)=0,$$

(근 $a=-1$을 찾아내어 나누면 된다) 따라서 $a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$이다.

이제 간단한 사실 하나를 이용한다. $S(x)$가 다항식이고 상수 K에 대해 $S(x)^2=x^4+K$이면 $(S-x^2)(S+x^2)=K$이다. S의 최고차항이 $\pm x^2$일 때 두 인수가 모두 영다항식(zero polynomial)이 아니라면, 적어도 하나는 차수가 2이므로 곱이 상수가 될 수 없다. 따라서 최고차항이 $\pm x^2$인 S에 대해서는 한 인수가 영이 되고, 정확히 $S=\pm x^2$이다.

$a=-1$인 경우. 이때 $2a+3=1$이고, 완전제곱식을 만들면

$$P^2+(2b-4)P+2c=\big(P+b-2\big)^2-(b-2)^2+2c=x^4.$$

따라서 $S=P+b-2=-x^2+bx+(c+b-2)$는 상수 K에 대해 $S^2=x^4+K$를 만족하고, 최고차항이 $-x^2$이다. 그러면 $S+x^2=bx+(c+b-2)$는 차수가 2보다 작고 $S-x^2$는 차수가 2이므로, 위의 사실에 의해 $S+x^2=0$이어야 한다. 즉 $b=0$이고 $c+b-2=0$이다. 따라서 $b=0$, $c=2$이고, 이때 $K=(b-2)^2-2c=0$이 되어 모순이 없다. 이로부터 다음을 얻는다.

$$\mathrm{p}(x)=2-x^2.$$

$a=\frac{1}{2}$인 경우. 이때 $2a+3=4$이고,

$$4P^2+(2b-4)P+2c=\left(2P+\tfrac{b-2}{2}\right)^2-\tfrac{(b-2)^2}{4}+2c=x^4.$$

이제 $S=2P+\frac{b-2}{2}=x^2+2bx+2c+\frac{b-2}{2}$의 최고차항은 x^2이므로, 같은 방법으로 $S-x^2=0$이다. 즉 $b=0$이고 $2c-1=0$이다. 따라서 $b=0, c=\frac{1}{2}$이고, $K=\frac{(b-2)^2}{4}-2c=1-1=0$이 되어 모순이 없다. 이로부터 다음을 얻는다.

$$\mathrm{p}(x)=\tfrac{1}{2}(x^2+1).$$

모든 단계를 거꾸로 되짚을 수 있으므로 둘 다 실제로 해이지만, 직접 확인해 보면 안심이 된다. $\mathrm{p}(x)=2-x^2$에 대해 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=2-(2-x^2)^2=-x^4+4x^2-2$이고,

$$2(-x^4+4x^2-2)+3(x^4-4x^2+4)-4(2-x^2)=x^4.$$

$\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$에 대해서는 $u=x^2+1$로 쓰자. 그러면 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=\frac{1}{4}u^2+1$이고, 좌변은 $\frac{1}{4}u^2+1+\frac{3}{4}u^2-2u=(u-1)^2=x^4$이다.

따라서 (ii)의 방정식을 만족하는 다항식은 정확히 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$와 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$이다.

검산

- (i)에서 $b = 1$을 넣어 보자. $\mathrm{p}(x) = x + 1$이면 $(x + 3) - 3(x + 1) = -2x$이다.
- (ii)에서 $x = 1$을 넣어 보자. $\mathrm{p}(x) = 2 - x^2$에 대해 $\mathrm{p}(1) = 1$, $\mathrm{p}(\mathrm{p}(1)) = 1$이고 $2 + 3 - 4 = 1 = 1^4$이다. $\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$에 대해 $x = 3$에서는 $\mathrm{p}(3) = 5$, $\mathrm{p}(5) = 13$이고 $26 + 75 - 20 = 81 = 3^4$이다.
- 또한 정확한 산술로 (i)의 두 해 모임이 무작위로 고른 여러 b에 대해 성립함을 확인했고, b, c를 $\frac{1}{4}$ 간격으로 바꾸어 가며 이차식의 격자를 탐색하면 (ii)의 두 해만 나온다는 것도 확인했다.

흔한 실수

- (ii)에서 좌변의 차수가 단순히 m^2이라고 가정하는 것. $m = 2$일 때 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$와 $3[\mathrm{p}(x)]^2$는 모두 차수가 4이고, 이 두 항이 상쇄될 가능성이 있기 때문에 바로 $2a^3 + 3a^2 = 1$에서 a를 구해야 하는 것이다.
- (i)에서 차수가 1이어야 하는 이유를 설명할 때 $m = 0$인 경우를 빠뜨리는 것.
- (i)에서 $a = 1$ 또는 $a = -2$에서 멈추고 특정한 b 하나를 정해 버리는 것. 상수항에 대한 조건은 모든 b에 대해 성립한다.

STEP 너머

규칙 $\deg(\mathrm{p} \circ \mathrm{q}) = \deg \mathrm{p} \cdot \deg \mathrm{q}$는 $\deg(\mathrm{pq}) = \deg \mathrm{p} + \deg \mathrm{q}$와 마찬가지로 계수들 사이에 영인자(zero divisor)가 없다는 사실에 기대고 있다. 영이 아닌 두 수의 곱이 영이 될 수 있는 환(ring)에서는 최고차항이 사라질 수 있어서 두 규칙 모두 성립하지 않는다. $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = \ldots$ 같은 함수방정식(functional equation)은 반복 사상(iterated map)과 동역학(dynamics)의 연구로도 이어진다. 다항식환(polynomial ring)과 차수 논법이 통하는 경우에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.