풀이

STEP II 2012, 문제 11

역학 • 비탄성 충돌

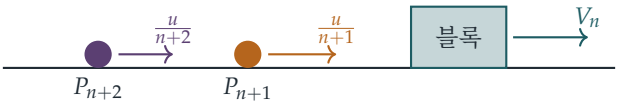
> **STEP II 2012, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q11

핵심 아이디어

각 입자가 가진 운동량(momentum)을 살펴보자. 질량 im에 속력 u/i를 곱하면 mu이고, 이 값은 모든 입자에서 같다. 따라서 n개의 입자가 흡수된 뒤 블록의 운동량은 간단히 nmu이고, 운동량 보존(conservation of momentum)으로부터 블록의 속력을 곧바로 얻는다. 그러면 다음 입자가 블록에 도달하는지는 두 속력을 비교하는 문제가 되고, 에너지 손실은 "들어온 운동에너지(kinetic energy) 빼기 나간 운동에너지"이다.

풀이

블록과 입자들을 매끄러운 면 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 수평 방향의 외력은 작용하지 않고, 모든 충돌에서 직선 방향의 운동량이 보존된다. 입자가 블록에 박히므로 각 충돌은 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이다.



n번째 충돌 후의 속력

입자 P_i의 운동량은 $im \cdot \frac{u}{i} = mu$로, i와 무관하다.

n번째 입자가 블록과 충돌한다고 하자. 그러면 입자 $P_1, \ldots, P_{n-1}$은 그보다 먼저 충돌했어야 한다. 입자들은 차례로 발사되고 각 입자는 바로 앞 입자보다 느리므로(u/i는 감소한다) 나중 입자가 앞선 입자를 추월할 수 없고, 어떤 입자도 블록에 부딪히지 않고 지나칠 수 없기

때문이다. 따라서 n번째 충돌 직후 블록은 $P_1, \ldots, P_n$을 포함하고, 그 질량은

$$km + m(1 + 2 + \cdots + n) = m\left(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right)$$

이다. 블록은 정지 상태에서 출발했고 흡수된 각 입자가 운동량 mu를 가져왔으므로, 운동량 보존에 의해 현재 전체 운동량은 nmu이다. 따라서 n번째 충돌 후 블록의 속력 V_n은

$$m\left(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right)V_n = nmu \quad \Longrightarrow \quad V_n = \frac{2nu}{2k + n(n+1)}$$

을 만족하며, 이것이 구하려던 결과이다.

$2k = N(N+1)$일 때의 충돌 횟수

n번의 충돌 후 블록은 일정한 속력 V_n으로 움직인다(면이 매끄럽기 때문이다). 블록 뒤에 있는 입자 P_{n+1}은 블록보다 엄밀히 빠를 때, 그리고 그때에만 블록을 따라잡는다.

$$\frac{u}{n+1} > \frac{2nu}{2k + n(n+1)} \iff 2k + n(n+1) > 2n(n+1) \iff 2k > n(n+1),$$

여기서 양수인 $n+1$과 $2k + n(n+1)$을 양변에 곱했다. ($n = 0$이면 이 조건은 $2k > 0$이 되어 참이다. P_1은 정지한 블록에 반드시 부딪힌다.)

> **생각해 보기** 한 입자가 빗나가면, 그 뒤의 입자가 여전히 블록에 부딪힐 수 있을까?

그렇지 않다. P_{n+1}이 블록을 따라잡지 못하면 블록은 속력 $V_n \geq \frac{u}{n+1}$을 영원히 유지하고, $i > n+1$일 때 $\frac{u}{i} < \frac{u}{n+1}$이므로 그 뒤의 모든 입자는 더욱 느리다. 따라서 충돌하는 입자는 정확히 $P_1, P_2, \ldots$에서 처음으로 따라잡지 못하는 입자 직전까지이다.

이제 $2k = N(N+1)$이라 하자. P_{n+1}이 부딪힐 조건은 $n(n+1) < N(N+1)$, 즉 $n < N$이 된다. $n(n+1)$이 $n \geq 0$에서 순증가하기 때문이다. 따라서 $P_1, \ldots, P_N$은 모두 블록에 부딪히지만 P_{N+1}은 그렇지 않다. $n = N$일 때 등호가 성립하며, 실제로

$$V_N = \frac{2Nu}{N(N+1) + N(N+1)} = \frac{u}{N+1}$$

은 정확히 P_{N+1}의 속력이므로, 이 입자는 블록 뒤에서 일정한 거리를 유지한다. 따라서 충돌은 정확히 N번 일어난다.

잃은 운동에너지

충돌에 참여하는 것은 $P_1, \ldots, P_N$뿐이므로, 전체 손실은 발사 시점에 이 입자들이 가진 운동에너지(블록은 정지 상태에서 출발한다)에서 블록의 최종 운동에너지를 뺀 값이다.

처음에는

$$\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(im)\left(\frac{u}{i}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$$

이다. 마지막에 블록의 질량은 $m\left(k+\frac{1}{2}N(N+1)\right) = mN(N+1)$이고 속력은 $\frac{u}{N+1}$이므로, 블록의 운동에너지는

$$\tfrac{1}{2}\,mN(N+1)\,\frac{u^2}{(N+1)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2\,\frac{N}{N+1} = \tfrac{1}{2}mu^2\left(1-\frac{1}{N+1}\right)$$

이다. 두 값을 빼면

$$\begin{aligned}\text{잃은 운동에너지} &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{N+1}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $N=1$ ($k=1$): 질량 m인 입자 하나가 속력 u로 질량 m인 블록에 부딪히면 속력은 $\frac{1}{2}u$가 되고, 손실은 $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{4}mu^2 = \frac{1}{4}mu^2$로 $\frac{1}{2}mu^2\cdot\frac{1}{2}$와 일치한다. 이때 P_2도 속력 $\frac{1}{2}u$로 움직이므로 결코 블록에 도달하지 않는다.
- $N=2$ ($k=3$): 공식에 따르면 손실은 $\frac{1}{2}mu^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{12}mu^2 \approx 0.4167\,mu^2$이다. 운동을 단계별로 정확히 시뮬레이션한 결과(위치와 충돌 시각을 분수로 계산)도 같은 값과 정확히 두 번의 충돌, 그리고 공식과 일치하는 속력 V_n을 주었다. 또한 이 시뮬레이션으로 11까지의 모든 N에 대해 N번의 충돌과 손실 공식이 성립함을 확인했다.
- 단위: 손실은 질량 곱하기 속력의 제곱이므로, 에너지가 가져야 할 단위를 가진다.

흔한 실수

- n번째 입자의 운동량만 쓰고, 블록에 이미 $P_1,\ldots,P_{n-1}$이 들어 있다는 것(또는 블록 자체의 질량 km)을 잊는 것.
- 충돌을 $N+1$번으로 세는 것: P_{N+1}은 블록과 속력이 정확히 같으므로 결코 블록에 닿지 않는다.
- 손실에 $P_{N+1}, P_{N+2},\ldots$의 운동에너지를 포함하는 것: 이 입자들은 충돌하지 않으므로 잃는 에너지가 없다.

STEP 너머

이 블록은 물질을 쓸어 담으면서 질량이 늘어나는 물체로, 로켓이나 구름 속을 떨어지는 빗방울과 같은 부류이다. 이러한 가변 질량계(variable-mass system)에서는 뉴턴(Newton)의

제2법칙을 "운동량의 변화율은 힘과 같다"는 형태로 계 전체에 적용하는데, 이는 우리가 충돌 하나하나마다 한 것과 정확히 같다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계와 로켓 운동을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.