풀이

STEP II 2012, 문제 10

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP II 2012, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q10

핵심 아이디어

막대는 원형 단면의 현(chord)이므로 모든 수직항력(normal reaction)은 중심 O를 정확히 향하고, 막대와 각 반지름 사이의 각 ϕ는 기하적으로 $\cos\phi = a/r$로 정해진다. 막대가 움직일 수 있는 유일한 방법은 O를 중심으로 회전하는 것이므로 양 끝은 함께 미끄러지고, 따라서 각 끝에서 마찰력(friction)이 어느 방향으로 작용하는지 알 수 있다. **중점**에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 무게가 사라져 첫 번째 관계식이 곧바로 나오고, 이어서 O에 대한 모멘트와 한 방향으로의 분해를 쓰면 $\tan\theta$를 얻는다.

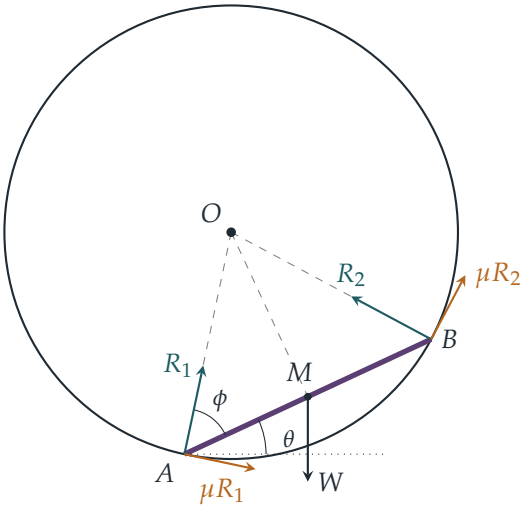
풀이

설정

막대를 무게가 W인 균일한 강체 막대로 모형화하고, 이 막대는 거친 원기둥에 양 끝 A(아래쪽)와 B(위쪽)에서만 닿아 있다고 하자. 원형 단면의 중심을 O, AB의 중점을 M이라 하자. $OA = OB = r$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이고, 따라서 OM은 AB에 수직이며

$$\cos\phi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \qquad OM = \sqrt{r^2 - a^2} = r\sin\phi,$$

이고 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$이다. 막대와 반지름 사이의 각은 **양** 끝 모두에서 ϕ이다.



생각해 보기 각 끝에서 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

양 끝은 원 위에 머물고 AB의 길이는 변하지 않으므로, OM은 길이를 유지하며 막대에 계속 수직이다. 따라서 가능한 운동은 O를 중심으로 한 회전뿐이다. $\theta \neq 0$이므로 M은 O의 바로 아래에 있지 않고, 무게는 O에 대하여 막대를 수평 쪽으로 돌리려는 모멘트를 가진다(그림에서는 시계 방향이다. A는 벽을 따라 올라가고 B는 내려가려 한다). 수직항력은 O를 지나므로 이를 막을 수 있는 것은 마찰력뿐이다. 양 끝은 함께 움직이려 하므로, 미끄러지기 직전에는 양쪽 모두에서 마찰력이 한계값(limiting)에 이른다. 즉 그림과 같이 μR_1과 μR_2가 A와 B에서의 접선을 따라, 둘 다 O에 대하여 반시계 방향으로 작용한다.

R_1과 R_2 사이의 관계

M에 대한 모멘트를 잡으면 무게가 사라진다. R_1의 작용선은 AO이고 이는 AM과 각 ϕ를 이루므로, M에서 이 작용선까지의 수직 거리는 $a\sin\phi$이다. A에서의 마찰력은 OA에 수직인 접선을 따라 작용하므로, M에서의 거리는 $a\cos\phi$이다. B에서도 마찬가지이다. 그림에서 R_1은 막대를 M에 대하여 시계 방향으로 돌리고, R_2와 두 마찰력은 반시계 방향으로 돌리므로

$$R_1 a\sin\phi = R_2 a\sin\phi + \mu R_1 a\cos\phi + \mu R_2 a\cos\phi.$$

이다. $a\cos\phi$로 나누고 정리하면

$$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다. 특히 $R_1 > R_2$이다. 즉 아래쪽 끝이 더 세게 누른다.

$\tan\theta$ 구하기

O에 대한 모멘트. 수직항력은 O를 지나고, 각 마찰력의 모멘트 팔 길이는 r이다. 무게는 M에 작용하며, OM이 막대에 수직이므로 OM은 연직선과 각 θ를 이룬다. 따라서 O에서 M까지의 수평 거리는 $OM\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$이다. 그러므로

$$\mu(R_1+R_2)\,r = Wr\sin\phi\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \mu(R_1+R_2) = W\sin\phi\sin\theta. \tag{1}$$

막대에 수직인 방향으로 분해하기(O가 있는 쪽을 향하는 방향). 각 수직항력은 막대와 각 ϕ를 이루므로 $R_i\sin\phi$만큼 기여한다. 각 마찰력은 이 수직 방향과 각 ϕ를 이루는데, A에서는 막대의 O 쪽에서 멀어지는 방향을, B에서는 그쪽을 향한다. 무게는 $-W\cos\theta$만큼 기여한다. 따라서

$$(R_1+R_2)\sin\phi - \mu(R_1-R_2)\cos\phi = W\cos\theta. \tag{2}$$

이다. $S = R_1+R_2$라 하자. 첫 번째 결과에서 $R_1-R_2 = \mu S\cot\phi$이므로 (2)는

$$S\,\frac{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}{\sin\phi} = W\cos\theta,$$

가 되고, (1)은 $\dfrac{\mu S}{\sin\phi} = W\sin\theta$를 말해 준다. 나누면(막대는 연직이 아니라 기울어져 있으므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\cos\theta\neq 0$이다)

$$\tan\theta = \frac{\mu}{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}.$$

이다. 분자와 분모에 r^2을 곱하고 $r^2\sin^2\phi = r^2-a^2$, $r^2\cos^2\phi = a^2$을 이용하면

$$\tan\theta = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2-\mu^2a^2} = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2(1+\mu^2)},$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

$\lambda<\phi$ 이끌어내기

> **?** **생각해 보기** 가진 것이 등식뿐인데, 부등식(inequality)은 어디에서 나오는가?

부호에서 나온다. 막대는 수평과 각 θ를 이루며 기울어져 있고 $\theta\neq 0$이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\tan\theta>0$이다. $\mu>0$이므로 분자 μr^2은 양수이고, 따라서 분모도 양수여야 한다.

$$r^2\sin^2\phi-\mu^2r^2\cos^2\phi>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\phi>\mu^2=\tan^2\lambda.$$

ϕ와 λ는 모두 $(0,\frac{\pi}{2})$에 속하고, 이 구간에서 tan는 양수이며 증가하므로 $\tan\phi>\tan\lambda$로부터 $\lambda<\phi$를 얻는다.

검산

- 매끄러운 극한: $\mu \to 0$이면 $\tan\theta \to 0$이므로, 매끄러운 막대는 M이 O의 바로 아래에 오는 수평 상태로만 정지할 수 있다. 올바르다.
- 수치: $r = 5$, $a = 3$, $\mu = \frac{1}{2}$로 두면 $\tan\phi = \frac{4}{3} > \frac{1}{2}$이고 $\tan\theta = \frac{12.5}{25-11.25} = \frac{10}{11}$이다. 이 각에서(그리고 무작위로 고른 수천 개의 r, a, μ에서) 두 힘의 방정식을 벡터 형태로 R_1, R_2에 대해 풀면, O에 대한 모멘트가 0이 되고 $\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi$가 10^{-12} 이내로 성립한다.
- $\lambda < \phi$의 물리적 의미: λ는 마찰각(angle of friction)이다. $\lambda \geq \phi$이면 마찰력이 어떤 기울기에서도 막대를 붙잡아 둘 만큼 강하므로, 막대는 결코 미끄러지기 직전 상태에 이르지 않고 그러한 θ는 존재하지 않는다.

흔한 실수

- 수직항력을 반지름 방향이 아니라 **막대**에 수직인 방향으로 잡는 것. 접촉은 원기둥과 이루어지므로, 법선은 원기둥의 법선이다.
- 두 마찰력을 막대를 따라 서로 반대 방향으로 두는 것. 양 끝은 O에 대하여 같은 회전 방향으로 움직이므로, 마찰력은 양쪽 모두에서 O에 대하여 반시계 방향이다.
- 첫 번째 결과를 얻으려고 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 분해하는 것. 두 방정식 모두 W를 포함한다. M에 대한 모멘트를 잡으면 이를 피할 수 있다.

STEP 너머

$\lambda < \phi$라는 결론은 마찰 원뿔(friction cone)의 개념이다. 거친 접촉점에서의 전체 반력은 법선으로부터 각 λ 이내에 있어야 한다. 여기서 막대는 두 점에서 접촉하고 있으며, 문제의 핵심은 두 마찰 원뿔이 세 힘이 한 점에서 만날 여지를 남겨 두는가 하는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 강체 정역학을 더 충실히 다루며, 곧 일어날 운동의 방향을 직접 알아내야 하는 문제들도 포함한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.