풀이

STEP II 2012, 문제 1

순수수학 • 이항급수의 계수

> **STEP II 2012, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q1

핵심 아이디어

각 인수 $(1-x^k)^{-1}$은 x^k에 대한 등비급수(geometric series)이다. 따라서 이런 인수들을 곱한 뒤 x^n의 계수(coefficient)를 읽어 내는 것은 n을 허용된 조각들의 합으로 나타내는 방법의 수를 세는 일과 같다. 계수를 개수로 보기 시작하면 경우 나누기가 저절로 정리되고, $(1-x)^{-1}$을 곱하는 것은 계수의 목록을 누적합(running total)의 목록으로 바꾸는 일일 뿐이다.

풀이

일반항

이항전개(binomial expansion)에 의해 $|y|<1$일 때 $(1-y)^{-2}=\sum_{r\geq 0}(r+1)y^r$이다(계수는 $\binom{-2}{r}(-1)^r=r+1$). $y=x^6$을 대입하면

$$(1-x^6)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^{6r},$$

이므로 일반항(general term)은 $(r+1)x^{6r}$이고, 지수가 6의 배수가 아닌 x의 거듭제곱은 모두 계수가 0이다.

소문항 (i)

또한 $(1-x^3)^{-1}=\sum_{s\geq 0}x^{3s}$이다. 두 급수를 곱하면, 항 x^n은 $6r+3s=n$을 만족하는 음이 아닌 정수의 쌍 (r,s) 하나하나로부터 생기고, 각 쌍은 $(r+1)\cdot 1$만큼 기여한다. 따라서

$$\text{계수}x^n=\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ 6r+3s=n}}(r+1).$$

$n = 24$일 때는 $2r + s = 8$이어야 하므로 r는 $0, 1, 2, 3, 4$가 될 수 있다(각각에 대해 $s = 8 - 2r \geq 0$이 정확히 하나씩 있다). 따라서 x^{24}의 계수는

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

일반적인 n. $6r + 3s$는 항상 3의 배수이므로 $3 \mid n$이 아니면 계수는 0이다. $n = 3m$이면 $2r + s = m$이어야 하고, $0 \leq 2r \leq m$인 각 r에 대해 조건을 만족하는 s가 정확히 하나 있다. 따라서 r는 0부터 $\lfloor m/2 \rfloor$까지 움직이고, 계수는

$$1 + 2 + \cdots + (\lfloor m/2 \rfloor + 1).$$

n을 6으로 나눈 나머지에 따라 나누어 쓰면 다음과 같다.

- $n = 6k (m = 2k, \lfloor m/2 \rfloor = k)$: 계수는 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$이다.
- $n = 6k + 3 (m = 2k + 1, \lfloor m/2 \rfloor = k)$: 계수는 역시 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$이다.
- $n \not\equiv 0 \pmod 3$: 계수는 0이다.

확인해 보면, $n = 24 = 6 \times 4$일 때 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$로 앞에서 구한 값과 같다.

소문항 (ii)

소문항 (i)에서 구한 x^n의 계수를 b_n, 이제 구하려는 계수를 c_n이라 하자. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$이므로

$$\Big(\sum_j b_j x^j\Big)(1 + x + x^2 + \cdots) = \sum_n \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) x^n,$$

따라서 $c_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, 즉 소문항 (i)의 계수들의 누적합이다.

> **생각해 보기** 왜 $(1-x)^{-1}$을 곱하면 누적합이 나올까?

곱에서 x^n을 얻으려면 첫 번째 급수에서 x^j를, $1 + x + x^2 + \cdots$에서 x^{n-j}를 골라야 하는데, 뒤쪽의 계수는 항상 1이다. 따라서 $0 \leq j \leq n$인 모든 b_j가 c_n에 가중치 1로 정확히 한 번씩 나타난다.

$3 \mid j$인 b_j만 0이 아니며, 소문항 (i)에 의해 이들은 같은 값끼리 짝을 이룬다. 즉 $b_{6k} = b_{6k+3} = T_{k+1}$이고, 여기서 $T_p = \frac{1}{2}p(p+1)$은 p번째 삼각수(triangular number)이다. 따라서 $n = 24$일 때

$$\begin{aligned} c_{24} &= (b_0 + b_3) + (b_6 + b_9) + (b_{12} + b_{15}) + (b_{18} + b_{21}) + b_{24} \\ &= 2(1 + 3 + 6 + 10) + 15 = 40 + 15 = 55, \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

$n = 25$일 때는 $3 \nmid 25$이므로 추가되는 항 b_{25}가 0이고, 따라서 $c_{25} = c_{24} = 55$이다.

$n = 66 = 6 \times 11$일 때는 같은 규칙에 의해

$$c_{66} = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_{11}) + T_{12}.$$

처음 p개의 삼각수의 합은 사면체수(tetrahedral number) $\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$이다(수학적 귀납법(induction)으로 보이거나, 하키 스틱 항등식(hockey-stick identity)에 의해 $T_1 + \cdots + T_p = \binom{p+2}{3}$임을 이용하면 된다). 따라서 $T_1 + \cdots + T_{11} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 286$이고 $T_{12} = 78$이다. 그러므로

$$c_{66} = 2 \times 286 + 78 = 650.$$

같은 논증으로 일반 공식을 얻을 수 있다. $n = 6K + r$이고 $0 \le r \le 2$이면 $c_n = 2\binom{K+2}{3} + \binom{K+2}{2}$이고, $3 \le r \le 5$이면 $c_n = 2\binom{K+3}{3}$이다. $K = 4$일 때 첫 번째 공식은 $40 + 15 = 55$를, $K = 11$일 때는 $572 + 78 = 650$을 준다.

검산

소문항 (ii)에서 x^n의 계수는 $6a + 6b + 3c + d = n$의 음이 아닌 정수해의 개수를 센다(각 인수마다 등비급수가 하나씩이며, $(1 - x^6)^{-2}$는 두 개로 센다). 이 해들을 컴퓨터로 직접 세어 보면 $n = 24, 25, 66$에 대해 55, 55, 650이 나온다. 급수를 x^{80}까지 항별로 곱해 보아도 두 소문항의 공식이 모두 확인된다. 손으로는 작은 경우를 빠르게 확인할 수 있다. 소문항 (ii)에서 $c_0 = c_1 = c_2 = 1$이고 $c_3 = c_4 = c_5 = 2$인데, 이는 $K = 0$일 때의 일반 공식과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $n = 6k + 3$인 경우를 빠뜨리는 실수: 3의 홀수 배도 x^3 인수를 홀수 개 곱하면 나타난다.
- $(1 - x^6)^{-2}$의 일반항을 $(r+1)x^{6r}$ 대신 $r\,x^{6r}$로 쓰는 실수: 상수항은 0이 아니라 1이다.
- x^{25}를 새로 계산해야 하는 것으로 여기는 실수: 소문항 (i)의 급수에는 지수가 25인 항이 없으므로 이 계수는 x^{24}의 계수와 같다.

STEP 너머

이처럼 개수를 세는 도구로 쓰이는 멱급수를 **생성함수**(generating functions)라 한다. 여기서의 곱은 6짜리 동전, (디자인이 다른) 또 하나의 6짜리 동전, 3짜리 동전, 1짜리 동전으로 n펜스를 지불하는 방법의 수를 센다. 분할(partitions) 이론은 바로 이 아이디어에서 자라났으며, 답이 n을 6으로 나눈 나머지에 따라 달라지는 구간별 다항식이라는 사실은 일반적인

현상이다(“준다항식(quasi-polynomials)”). 이 방법에 대한 생동감 있는 입문서로 Wilf의 *generatingfunctionology*를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.