풀이

STEP I 2012, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP I 2012, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

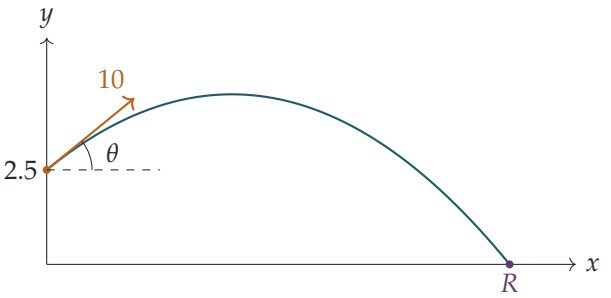
step.maths.org/questions/12-s1-q9

핵심 아이디어

이 문제는 높은 곳에서 발사된 포물체(projectile)에 관한 것이므로, 비행 시간은 t에 대한 이차방정식(quadratic)에서 나오고, 문제의 핵심은 그 근을 $c = \cos 2\theta$로 다시 쓰는 데 있다. 배각 공식(double-angle formulae) $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-c)$와 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$가 모든 일을 해 준다. 수평 도달 거리(range)를 하나의 변수 c의 함수로 나타내고 나면, 그 최댓값을 구하는 것은 제곱할 때 약간 주의하기만 하면 되는 평범한 미적분 문제이다.

풀이

포환을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 모형화한다. 원점을 발사 지점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 또 $0 \le \theta < 90°$(포환을 앞쪽 위로 던진다)라고 가정하면 $\sin\theta \ge 0$이고 $\cos\theta > 0$이다.



비행 시간

수평 방향 속도는 $10\cos\theta$로 일정하고, 연직 방향 운동은 초기 속도가 $10\sin\theta$, 가속도가 -10이므로 시각 t에서

$$x = 10t\cos\theta, \qquad y = 2.5 + 10t\sin\theta - 5t^2.$$

포환은 $y = 0$일 때, 즉

$$5t^2 - 10t\sin\theta - 2.5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - 2t\sin\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

일 때 땅에 떨어진다. 두 근의 곱이 $-\frac{1}{2} < 0$이므로 양의 근은 정확히 하나이고, 그것은 더하기 부호를 택한 근이다.

$$T = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}}.$$

이제 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1 - c)$를 이용한다. $\sin\theta \geq 0$이므로 $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$로 쓸 수 있고, $\sin^2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2 - c)$이다. 따라서

$$T = \sqrt{\frac{1-c}{2}} + \sqrt{\frac{2-c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right),$$

이고, 이것이 구하는 시간(초 단위)이다.

수평 도달 거리

마찬가지로 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + c)$이고 $\cos\theta > 0$이므로 $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$이다. 수평 도달 거리는

$$\begin{aligned} R = 10T\cos\theta &= 10\sqrt{\frac{1+c}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right) \\ &= 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{(1+c)(2-c)}\right) = 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{2+c-c^2}\right)\ \text{m}. \end{aligned}$$

이다. θ가 $[0°, 90°)$에서 변할 때 $c = \cos 2\theta$는 $(-1, 1]$에서 변하므로, 이 구간에서 R의 최댓값을 구한다.

수평 도달 거리의 최대화

$-1 < c < 1$에서 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 5\left(\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}\right).$$

이다. 정류점(stationary point)이 되려면

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}. \qquad (*)$$

이어야 한다.

? 생각해 보기 $(*)$를 그냥 제곱해도 될까? 무엇이 잘못될 수 있을까?

제곱하면 부호 정보가 사라지므로 가짜 근이 생길 수 있다. 두 분모는 모두 양수이므로, $(*)$에서 c와 $1-2c$는 같은 부호여야 한다(둘 다 0인 경우는 불가능하다). 따라서 $0 < c < \frac{1}{2}$이어야 하며, 이 사실을 기억해 둔다. 제곱하고 분모를 없애면

$$\begin{aligned} 4c^2(2+c-c^2) &= (1-2c)^2(1-c^2) \\ 8c^2+4c^3-4c^4 &= 1-4c+3c^2+4c^3-4c^4 \\ 5c^2+4c-1 &= 0 \\ (5c-1)(c+1) &= 0. \end{aligned}$$

근 $c=-1$은 $0<c<\frac{1}{2}$ 밖에 있으므로(이것은 연직으로 던지는 경우이다), 유일한 정류점은 $c=\frac{1}{5}$이다. 이 값은 실제로 $(*)$를 만족한다. $\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$이고 $\sqrt{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$이므로 양변이 모두 $\frac{1}{2\sqrt{6}}$이기 때문이다.

이 점에서

$$R(\tfrac{1}{5}) = 5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{3\sqrt{6}}{5}\right) = 5\sqrt{6} \approx 12.25.$$

이다. 이것이 최댓값임을 확인하기 위해 구간의 양 끝값과 비교한다. $c \to -1$일 때 $R \to 0$이고, $R(1)=5\sqrt{2}\approx 7.07$이다. R은 $[-1,1]$에서 연속이고 내부에서 미분가능하므로, 최댓값은 구간의 끝점이나 정류점에서 나타난다. 유일한 정류점에서의 값이 이들 가운데 가장 크다. 그러므로 수평 도달 거리는 $c=\frac{1}{5}$일 때 최대가 되며, 이것이 보이려던 것이다. (이는 $\theta = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\approx 39.2°$로, $45°$보다 약간 작다.)

추가로 얻는 거리

$45°$에서는 $c=\cos 90° = 0$이므로

$$R(0) = 5\left(1+\sqrt{2}\right).$$

이다. 따라서 추가로 얻는 거리는

$$5\sqrt{6}-5\left(1+\sqrt{2}\right) = 5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)\ \text{m},$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- $\theta = 0$ $(c=1)$일 때 시간은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이며, 이는 높이 2.5 m인 턱에서 굴러 떨어지는 공에 대한 $2.5 = 5t^2$과 일치한다.

- $c \to -1$ (연직으로 던지는 경우)일 때 수평 도달 거리는 당연히 0으로 수렴한다.
- 수치로 계산하면 추가로 얻는 거리는 $5(2.4495 - 1.4142 - 1) \approx 0.176\,\text{m}$, 즉 약 18 cm에 불과하다. 최적점 근처가 매우 평평하다는 뜻이다. 비행을 단계별로 수치 시뮬레이션한 결과와 $R(c)$를 촘촘한 격자에서 탐색한 결과 모두 공식과 일치하며, 최댓값이 $c = 0.2$에서 나타난다.

흔한 실수

- 근의 공식에서 빼기 부호를 택하여 음의 시간을 얻는 것.
- $(*)$를 제곱한 뒤 $c = -1$을 확인하지 않고 그대로 두거나, $c = \frac{1}{5}$가 최솟값이 아니라 최댓값임을 정당화하는 것을 잊는 것.
- 최적의 각도가 45°라고 가정하는 것. 이는 발사 지점과 착지 지점의 높이가 같을 때에만 성립한다.

STEP 너머

높은 곳에서 발사하면 최적의 각도는 항상 45°보다 작아진다. 일반적으로 최적의 각도는 $\tan\theta = u/\sqrt{u^2 + 2gh}$를 만족하며, 이 문제에서는 $\tan\theta = \sqrt{2/3}$이 되어 $\cos 2\theta = \frac{1}{5}$와 같다. 매개변수에 대한 함수를 최적화하고 그 최댓값 근처가 얼마나 평평한지 살펴보는 것은 민감도 분석(sensitivity analysis)을 처음 맛보는 일이다. 최댓값 근처에서는 매개변수의 작은 오차가 이차 정도의 손실만 일으킨다. 공기 저항이 있을 때와 없을 때의 포물체 운동에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.