풀이

STEP I 2012, 문제 8

순수수학 • 동차 미분방정식

> **STEP I 2012, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q8

핵심 아이디어

두 방정식은 모두 **동차**(*homogeneous*)이다. 전체에 곱해진 x의 거듭제곱을 빼면, 모든 항의 x와 y에 대한 전체 차수가 같다. $y = xv$로 놓으면 그 x의 거듭제곱이 약분되고, 방정식은 v 부분과 x 부분으로 분리된다. 소문항 (i)은 이 과정을 차례대로 안내한다. 소문항 (ii)는 이를 스스로 하도록 남겨 둔다. 양변을 x로 나누어 보면 같은 종류의 방정식임을 알 수 있고, 이때 v에 대한 적분에는 부분분수(partial fractions)가 필요하다.

풀이

소문항 (i)

$y = xv$이면 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$이다. 이를 대입하면

$$x(xv)\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + x^2v^2 - 2x^2 = x^3v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2x^2v^2 - 2x^2 = 0.$$

$x \neq 0$이므로 x^2으로 나눌 수 있고, 그러면

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v^2 - 2 = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

이제 변수를 분리(separation of variables)한다. 방정식은 $xv\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1 - v^2)$을 뜻한다. $v^2 \neq 1$이면

$$\int \frac{v}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1 - v^2| = 2\ln|x| + c.$$

양변에 -2를 곱하고 지수를 취하면 어떤 상수 $A > 0$에 대하여 $|1 - v^2| = Ax^{-4}$이므로

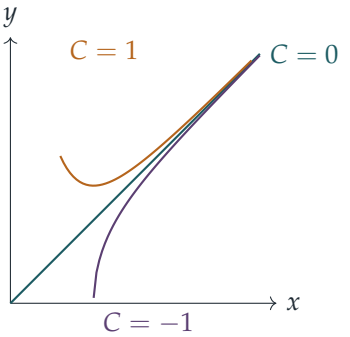
$$x^4(v^2 - 1) = C,$$

이다. 여기서 $C = \pm A$는 0이 아닌 상수이다. 앞에서 제외해 둔 경우인 $v = \pm 1$(즉 $y = \pm x$)도 해이다. 이때 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$이고 $2v^2 - 2 = 0$이기 때문이다. 이 경우는 정확히 $C = 0$인 경우이므로, C는 임의의 상수가 될 수 있다.

마지막으로 $v = y/x$를 대입하면

$$x^4\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = x^2(y^2 - x^2) = C,$$

이고, 이것이 요구된 꼴이다.



그림은 제1사분면에서 몇 개의 해곡선을 보여 준다. $y^2 = x^2 + C/x^2$에서 짐작할 수 있듯이, 이 곡선들은 $x \to \infty$일 때 직선 $y = x$에 가까워진다.

소문항 (ii)

$6x + 5y$의 모든 항은 차수가 1이고, $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$도 마찬가지이다. 따라서 같은 치환 $y = xv$를 시도해 볼 만하다.

$$xv\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + 6x + 5xv = 0.$$

$x \neq 0$으로 나누고 항을 정리하면

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -(v^2 + 5v + 6) = -(v + 2)(v + 3).$$

생각해 보기 $\dfrac{v}{(v+2)(v+3)}$는 어떻게 적분할까?

부분분수를 이용한다. $v = P(v + 3) + Q(v + 2)$로 놓는다. $v = -2$를 대입하면 $P = -2$이고, $v = -3$을 대입하면 $Q = 3$이다. 따라서

$$\frac{v}{(v+2)(v+3)} = \frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}.$$

$v \neq -2, -3$이면 변수를 분리하여

$$\int \Big(\frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}\Big)\mathrm{d}v = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Longrightarrow \quad 3\ln|v+3| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + c.$$

따라서 $|x|\,|v+3|^3/(v+2)^2$은 상수이다. 절댓값 기호를 없애면($v \neq -3$인 해곡선을 따라서는 $x(v+3)^3$의 부호가 바뀔 수 없다)

$$\frac{x(v+3)^3}{(v+2)^2} = K.$$

이제 $v = y/x$를 대입한다. 분자는 $x(y+3x)^3/x^3$이고 분모는 $(y+2x)^2/x^2$이므로, x의 거듭제곱이 완전히 약분된다.

$$\boxed{(y+3x)^3 = K(y+2x)^2},$$

여기서 K는 상수이다.

제외했던 직선들도 해이다. $y = -3x$이면 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x$이고 $6x + 5y = -9x$이므로 방정식이 성립한다. 이 직선은 상자 안 식에서 $K = 0$인 경우이다. $y = -2x$이면 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x$이고 $6x + 5y = -4x$이므로 이 직선도 해이다. 이 직선은 어떤 유한한 K로도 나타나지 않으며, $K \to \infty$에 해당한다. 해를 $(y+2x)^2 = k(y+3x)^3$으로 쓰면 대신 $k = 0$으로 이 직선을 포함할 수 있다.

검산

- 소문항 (i): $x^2y^2 - x^4 = C$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2xy^2 + 2x^2y\,y' - 4x^3 = 0$이다. $2x$로 나누면 원래 방정식이 다시 나온다.
- 소문항 (ii): 무작위로 고른 여러 시작점에서 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로) 풀어 나갔다. 각 해를 따라 $(y+3x)^3/(y+2x)^2$의 값은 약 10^{-14} 범위 안에서 일정하게 유지되었다. 예를 들어 $(1,1)$을 지나는 곡선은 $K = 64/9$이다.
- 각 방정식을 만족하는 원점을 지나는 직선 $y = \pm x$와 $y = -2x, -3x$는 $2v^2 - 2 = 0$과 $v^2 + 5v + 6 = 0$의 근에서 나온다. 이는 v에 대한 방정식이 올바르다는 좋은 신호이다.

흔한 실수

- 곱의 미분법을 잊는 것: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$는 $x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$가 아니라 $v + x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$이다.
- 부분분수를 잘못 구하는 것(예를 들어 $2/(v+2) - 3/(v+3)$으로). $v = 0$과 같은 값을 넣어 분해가 맞는지 확인하라.
- $1 - v^2$이나 $(v+2)(v+3)$으로 나누면서 이 때문에 일부 직선 해를 잃는다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(y/x)$ 꼴의 방정식을 동차라고 한다. 이 방정식의 해곡선들은 확대·축소 $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$에 의해 서로 옮겨지며, 바로 이 때문에 $v = y/x$가 효과가 있다. 이것은 소푸스 리(Sophus Lie)에게서 비롯된 깊은 아이디어의 가장 간단한 경우이다. 즉, 미분방정식(differential equation)의 대칭(symmetry)을 이용하여 방정식의 계수(order)를 낮출 수 있다. 직선 해 $y = mx$는 확대·축소로 변하지 않는 곡선들이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 동차 방정식과 그 밖의 1계 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.