풀이

STEP I 2012, 문제 7

순수수학 • 주기적인 점화식

> **STEP I 2012, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q7

핵심 아이디어

주기(period)가 1, 2 또는 3으로 반복되는 수열(sequence)은 처음 몇 항으로 완전히 결정되므로, 점화식(recurrence)은 한 주기 안에 있는 몇 개의 연속한 세 항(그리고 주기의 끝에서 처음으로 되돌아가는 부분)에 대해서만 성립하면 된다. 이를 모두 적으면 x, y, z에 대한 작은 연립일차방정식(simultaneous linear equations)을 얻는다. 이 방정식들은 모두 0은 아닌 해를 가지며, 바로 이것이 p와 q에 대한 조건을 강제한다. 풀이 전체에서 약분을 가능하게 하는 것은 $x \neq 0$이라는 사실이다.

풀이

소문항 (i)

모든 n에 대해 $t_n = x$이면 점화식에 의해 $x = px + qx$, 즉 $(p + q - 1)x = 0$이다. $x \neq 0$이므로 $p + q = 1$을 얻는다.

역으로 $p + q = 1$이고 $t_0 = t_1 = x$이면 $t_2 = (p + q)x = x$이고, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 항이 x와 같다. x를 제한하는 조건은 없으므로 x는 0이 아닌 임의의 실수일 수 있다.

소문항 (ii)

패턴 $x, y, x, y, \ldots$가 점화식을 만족하는 것은 연속한 두 세 항 (x, y, x)와 (y, x, y)가 점화식을 만족하는 것과 정확히 같다.

$$x = py + qx, \qquad \text{즉} \quad (1-q)x = py, \tag{1}$$

$$y = px + qy, \qquad \text{즉} \quad (1-q)y = px. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하고 빼면

$$(1-q-p)(x+y) = 0, \qquad (1-q+p)(x-y) = 0.$$

을 얻는다. 수 $x+y$와 $x-y$가 둘 다 0일 수는 없는데, 그렇다면 $x = 0$이 되기 때문이다. $x+y \neq 0$이면 $p+q = 1$이고, $x-y \neq 0$이면 $q-p = 1$이다. 따라서 요구된 대로 $q+p = 1$과 $q-p = 1$ 중 적어도 하나가 성립한다.

이제 x와 y 사이의 관계를 이끌어 낸다.

- $q+p = 1$이면 $1-q = p$이므로 (1)은 $px = py$가 된다. 따라서 $p \neq 0$**이기만 하면** $x = y$이다.
- $q-p = 1$이면 $1-q = -p$이므로 (1)은 $-px = py$가 된다. 따라서 마찬가지로 $p \neq 0$이면 $x = -y$이다.

유일한 예외는 $p = 0$인 경우이며, 이때 어느 경우든 $q = 1$이 된다. $p = 0$이고 $q = 1$이면 점화식은 $t_{n+2} = t_n$이고, 모든 패턴 $x, y, x, y, \ldots$가 이를 만족하므로 x와 y 사이에는 아무 관계도 없다. 그러므로 $p = 0$이고 $q = 1$인 경우를 제외하면 $x = y$ 또는 $x = -y$이다.

소문항 (iii)

이번에는 패턴이 $x, y, z, x, y, z, \ldots$이고, 연속한 세 개의 세 항 (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)가 필요하다.

$$z = py + qx, \tag{3}$$

$$x = pz + qy, \tag{4}$$

$$y = px + qz. \tag{5}$$

(3)을 이용하여 나머지 두 식에서 z를 소거한다.

$$(4): \quad x = p(py + qx) + qy \qquad \Longrightarrow \quad (pq-1)x + (p^2+q)y = 0,$$

$$(5): \quad y = px + q(py + qx) \qquad \Longrightarrow \quad (p+q^2)x + (pq-1)y = 0.$$

첫 번째 식에 $pq-1$을, 두 번째 식에 p^2+q를 곱한 다음 빼자. y항이 소거되어

$$\left[(pq-1)^2 - (p^2+q)(p+q^2)\right]x = 0.$$

이 남는다.

생각해 보기 왜 괄호 안이 반드시 0이어야 할까? 방정식에 해가 아예 없을 수도 있지 않을까?

해는 존재한다. 수열이 존재하므로 x와 y는 두 방정식을 모두 만족한다. 그리고 $x \neq 0$이므로 x로 나눌 수 있다. 괄호를 전개하면

$$\begin{aligned}(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2) &= p^2q^2-2pq+1-\left(p^3+p^2q^2+pq+q^3\right)\\ &= 1-3pq-p^3-q^3,\end{aligned}$$

이므로 요구된 대로 $p^3+q^3+3pq-1=0$이다.

인수분해(factorising). 이 식은 $a=p, b=q, c=-1$일 때의 $a^3+b^3+c^3-3abc$이고, 잘 알려진 항등식(identity)

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

에 의해

$$p^3+q^3+3pq-1=\tfrac{1}{2}(p+q-1)\left[(p-q)^2+(q+1)^2+(p+1)^2\right].$$

를 얻는다. (이 항등식이 기억나지 않는다면 전개하여 확인하면 된다. 대괄호 안은 $2(p^2+q^2+1-pq+p+q)$이고, 여기에 $p+q-1$을 곱하면 원래의 삼차식이 나온다.) 이 곱은 0이므로 $p+q=1$이거나 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$이다.

경우 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$**.** 실수의 제곱의 합이 0이 되는 것은 각 제곱이 모두 0일 때뿐이므로 $p=q=-1$이다. 이때 (3)은 $z=-y-x$, 즉 $x+y+z=0$이 된다.

경우 $p+q=1$**.** (3), (4), (5)에 $q=1-p$를 대입하고 각각을 차의 꼴로 정리하면

$$z-x=p(y-x), \qquad x-y=p(z-y), \qquad y-z=p(x-z).$$

이다. $a=y-x, b=z-y, c=x-z$로 놓으면 $a+b+c=0$이다. 첫 번째와 세 번째 식에서 $c=-pa$이고 $b=-pc=p^2a$이다. 그러면

$$0=a+b+c=a(1-p+p^2).$$

이다.

생각해 보기 $1-p+p^2$이 0이 될 수 있을까?

그럴 수 없다. 모든 실수 p에 대해 $1-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이다. 따라서 $a=0$이고, 이로부터 $c=-pa=0$, 그리고 $b=0$을 얻는다. 즉 $x=y=z$이다.

$p = q = -1$이면 $p + q = -2 \neq 1$이므로 두 경우는 겹치지 않는다. 따라서 $x = y = z$이거나($p + q = 1$일 때) $x + y + z = 0$이다($p = q = -1$일 때). 두 경우 모두 실제로 일어난다. 두 번째 경우 점화식 $t_{n+2} = -t_{n+1} - t_n$은 임의의 초깃값에 대해 $x,\ y,\ -x - y,\ x,\ y,\ \ldots$를 준다.

검산

- $p = q = -1, t_0 = 2, t_1 = 5$이면 수열은 $2, 5, -7, 2, 5, -7, \ldots$이고, $2 + 5 - 7 = 0$이다.
- $p = 3, q = 4$일 때($q - p = 1$이므로) $1, -1$로 시작하면 $t_2 = -3 + 4 = 1, t_3 = 3 - 4 = -1$이 되어, 소문항 (ii)에서 예측한 대로 번갈아 나타난다.
- $p = 2, q = -1$에서 삼차식은 $8 - 1 - 6 - 1 = 0$이 되어 $p + q = 1$과 일치한다. 또한 임의로 고른 1000개의 (p, q)에서 전개, 인수분해, 그리고 삼차식이 (3)–(5)의 3×3 행렬식(determinant)과 일치함을 확인하였다. 점화식을 시뮬레이션하여 위의 모든 경우를 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $p + q = 1$ 이고 $q - p = 1$이라고 결론짓는 것. 논증이 보여 주는 것은 적어도 하나가 성립한다는 것뿐이며, 둘 다 성립하는 것은 예외적인 경우 $p = 0, q = 1$뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 $p = 0$이 바로 문제가 묻고 있는 예외임을 알아차리지 못하고 p로 나누는 것.
- 순환하는 방정식 (4)와 (5)를 잊는 것. 한 주기당 방정식 하나로는 조건을 강제하기에 충분하지 않다.

STEP 너머

$t_{n+2} = pt_{n+1} + qt_n$을 다루는 표준적인 방법은 **특성방정식**(*characteristic equation*) $\lambda^2 = p\lambda + q$를 이용하는 것이다. 일반적으로 $t_n = A\alpha^n + B\beta^n$이며, 여기서 α와 β는 특성방정식의 근이다. 수열이 k단계마다 반복되는 것은 그 수열이 사용하는 근들이 $\lambda^k = 1$을 만족하는 것과 정확히 같다. 상수 수열에는 근 1이 필요하고(따라서 $p + q = 1$), 번갈아 나타나는 수열에는 -1이 필요하다(따라서 $q - p = 1$). $p = q = -1$인 경우는 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$을 주는데, 그 근은 1의 복소 세제곱근(complex cube roots of unity)이며, 이것이 바로 그 합 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이 $x + y + z = 0$으로 다시 나타나는 이유이다. 이것은 모습을 바꾼 선형대수학(linear algebra)(수열에 작용하는 이동 사상(shift map))이며, 스

트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 바로 이런 방식으로 고유값(eigenvalue)을 통해 점화식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.