풀이

STEP I 2012, 문제 6

순수수학 • 삼각부등식(삼각함수)

> **STEP I 2012, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q6

핵심 아이디어

여기서 모든 앙각(angle of elevation)은 같은 대변, 즉 깃대를 공유하므로 각 코탄젠트(cotangent)는 수평 거리를 높이로 나눈 값에 불과하다. 그러면 첫 번째 결과는 원 안의 길이에 관한 사실이 된다. 반원(semicircle)에 대한 원주각은 직각이므로 $DC^2 = AD \cdot DB$이다. 삼각함수 항등식(identity)은 $\cot p \cot q - \cot^2 \frac{1}{2}(p+q)$를 부호를 바로 읽을 수 있는 꼴로 바꾸어 준다. 이 부등식을 얻고 나면 기하가 마지막 결과를 거의 공짜로 건네준다.

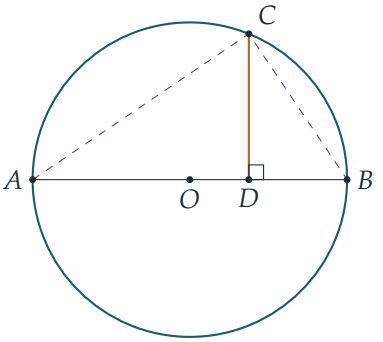
풀이

기하학적 결과

깃대의 높이를 $h > 0$, 꼭대기를 T라 하자. 그러면 DT는 수직이다. A, B, C는 모두 지면 위에 있으므로 삼각형 TDA, TDB, TDC는 D에서 직각이다. 따라서

$$\cot\alpha = \frac{AD}{h}, \qquad \cot\beta = \frac{DB}{h}, \qquad \cot\phi = \frac{DC}{h}.$$

α와 β가 예각이므로 D는 A도 B도 아니다(그 두 점에서는 앙각이 직각이 될 것이다). 따라서 D는 A와 B 사이에 엄밀하게 놓이고 $DC > 0$이다.



이제 지면의 평면도를 보자. 중심을 O, 반지름을 r, $x = OD$라 하자(B 쪽으로 잰 값이므로 $-r < x < r$이다). 그러면 $AD = r + x$, $DB = r - x$이고, 삼각형 ODC에서 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - x^2$이다. 그러므로

$$AD \cdot DB = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2 = DC^2.$$

(같은 말로, $\angle ACB$는 반원에 대한 원주각이므로 직각이고, CD는 직각삼각형 ACB의 높이(altitude)이다.) h^2으로 나누면

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{AD \cdot DB}{h^2} = \frac{DC^2}{h^2} = \cot^2\phi,$$

이므로 증명이 끝난다.

항등식

$s = \frac{1}{2}(p + q)$라 두고 배각 공식(double-angle formula)의 꼴 $\sin^2 s = \frac{1}{2}(1 - \cos(p + q))$와 $\cos^2 s = \frac{1}{2}(1 + \cos(p + q))$를 이용하자. 좌변은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos p \cos q(1 - \cos(p + q)) - \tfrac{1}{2}\sin p \sin q(1 + \cos(p + q)) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}(\cos p \cos q - \sin p \sin q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(\cos p \cos q + \sin p \sin q) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cos(p + q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\cos(p - q),
\end{aligned}$$

여기서 $\cos(p + q)$와 $\cos(p - q)$에 대한 덧셈정리(compound-angle formulae)를 사용하였다. 이 식은 모든 p와 q에 대하여 성립한다.

부등식

항등식의 우변을 인수분해하자.

$$\cos p \cos q \sin^2 s - \sin p \sin q \cos^2 s = \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(1 - \cos(p - q)).$$

이제 $p, q > 0$이고 $p + q \le \frac{1}{2}\pi$라 하자. 그러면 $0 < p + q \le \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos(p + q) \ge 0$이고, $1 - \cos(p - q) \ge 0$은 항상 성립한다. 따라서 우변은 음이 아니고,

$$\cos p \cos q \sin^2 s \;\ge\; \sin p \sin q \cos^2 s.$$

생각해 보기 양변을 $\sin p \sin q \sin^2 s$로 안심하고 나눌 수 있는가?

그렇다. p와 q는 양수이고 그 합이 많아야 $\frac{1}{2}\pi$이므로 p, q, s는 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하고, 따라서 $\sin p, \sin q, \sin s$는 모두 엄밀하게 양수이다. 양수 $\sin p \sin q \sin^2 s$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$\cot p \cot q \ \geq \ \cot^2 s = \cot^2 \tfrac{1}{2}(p+q).$$

등호는 $p = q$이거나 $p + q = \frac{1}{2}\pi$일 때, 그리고 그때에만 성립한다.

마지막 결과

$p = \alpha, q = \beta$로 놓자. 둘 다 양수이고(높이가 양수인 깃대의 앙각이므로) $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$이므로 위 부등식을 적용할 수 있다. 첫 번째 결과와 합치면

$$\cot^2 \phi = \cot \alpha \cot \beta \ \geq \ \cot^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

ϕ와 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$는 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하므로(ϕ는 $DC > 0$이고 $h > 0$이기 때문이다) 두 코탄젠트는 모두 양수이고, 양변의 제곱근을 취할 수 있다. 즉 $\cot\phi \geq \cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$이다.

생각해 보기 왜 이로부터 $\geq$가 아니라 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$가 나오는가?

cot은 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 순감소(*decreasing*)하기 때문이다. 즉 코탄젠트가 클수록 각은 작다. 따라서

$$\phi \leq \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \alpha+\beta \leq \tfrac{1}{2}\pi\text{일 때마다} \alpha+\beta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

검산

- $D = O$이면 $AD = DB = DC = r$이므로 $\alpha = \beta = \phi$이다. 첫 번째 결과의 양변이 같고, 마지막 부등식은 등식이 되어 $p = q$인 경우와 일치한다.
- 수치 검증: $r = 1, OD = \frac{1}{2}, h = 1$이면 $\cot\alpha = 1.5, \cot\beta = 0.5, \cot^2\phi = 0.75$로 예측과 같다. 이때 $\alpha + \beta \approx 0.588 + 1.107 = 1.695 > \frac{1}{2}\pi$이므로 마지막 결과가 성립할 필요가 없다. 실제로 $\phi \approx 0.857 > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx 0.848$이므로 조건이 중요함을 알 수 있다.
- 무작위로 고른 10^5개의 (p, q)에서 항등식을, 허용 범위 안의 무작위 쌍 2×10^5개에서 부등식을, 그리고 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$인 무작위 배치 약 8×10^4개에서 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$를 확인하였으며, 실패한 경우는 없었다.

흔한 실수

- cot이 감소함수임을 잊고 $\phi \geq \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$라고 결론짓는 것.
- $\sin p \sin q \sin^2 s$가 왜 양수인지 밝히지 않고 부등식을 그것으로 나누는 것.
- 조건 $p + q \leq \frac{1}{2}\pi$를 무시하는 것. 이 조건이 바로 $\cos(p+q) \geq 0$을 보장하며, 이 조건이 없으면 부등식이 성립하지 않을 수 있다.

STEP 너머

이 부등식은 $\ln\cot p$와 $\ln\cot q$의 평균이 평균의 $\ln\cot$ 값 이상임을 말하므로, $\ln\cot t$가 $(0, \frac{1}{4}\pi]$에서 볼록 함수(convex function)임을 뜻한다. 볼록성과 옌센 부등식(Jensen's inequality)은 대학 1학년 해석학에서 부등식을 얻는 강력한 원천이다. 관계식 $DC^2 = AD \cdot DB$는 유클리드(Euclid)의 기하평균(geometric mean) 작도이다. 즉 $\cot\phi$는 $\cot\alpha$와 $\cot\beta$의 기하평균이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 볼록 함수를 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.