풀이

STEP I 2012, 문제 5

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2012, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q5

핵심 아이디어

처음 두 적분은 모두 표준적인 도구로 해결된다. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$로 쓰면 $\sin x$가 $\cos x$의 도함수(derivative)에 음의 부호를 붙인 것임을 알 수 있으므로, 치환(substitution) $u = \cos x$가 통한다. 두 번째 적분에서는 로그(logarithm)가 다루기 까다로운 인수이므로, 부분적분(integration by parts)을 하여 로그를 미분해 없앤다. 마지막 적분에서 $\cos x + \sin x$는 모습을 바꾼 코사인, 즉 $\sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$이다. 변수를 $\frac{1}{4}\pi$만큼 평행이동하면 적분 구간은 $[0, \frac{1}{4}\pi]$가 되고, 피적분함수(integrand)는 방금 구한 두 적분의 결합이 된다.

풀이

첫 번째 적분

첫 번째 적분을 I_1이라 하자. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$이므로 $u = \cos x$로 치환하면 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$이다. $x = 0$일 때 $u = 1$이고, $x = \frac{1}{4}\pi$일 때 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 따라서

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\cos x \ln(\cos x)\,\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 2u\ln u\,\mathrm{d}u,$$

이다. 여기서 $\mathrm{d}u$에서 나온 음의 부호는 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 데 사용하였다. 부분적분을 하면($\ln u$를 미분하고 $2u$를 적분한다)

$$\int 2u\ln u\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \int u^2\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \tfrac{1}{2}u^2.$$

$u = 1$에서 이 값은 $-\frac{1}{2}$이다. $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서는 $u^2 = \frac{1}{2}$이고 $\ln u = -\frac{1}{2}\ln 2$이므로 그 값은 $-\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$이다. 그러므로

$$I_1 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(\ln 2 - 1),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

두 번째 적분

두 번째 적분을 I_2라 하자. $\ln(\cos x)$를 미분하고 $\cos 2x$를 적분하는 방식으로 부분적분을 한다. $\cos 2x$의 편리한 원시함수(antiderivative)는 $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$이고, $\ln(\cos x)$의 도함수는 $-\sin x / \cos x$이다. 따라서

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[\sin x \cos x \, \ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 왜 그냥 $\frac{1}{2}\sin 2x$로 쓰지 않고 $\sin x \cos x$를 택하는가?

둘은 같은 함수이지만, $\sin x \cos x$의 꼴로 쓰면 인수 $\cos x$가 $\ln(\cos x)$의 도함수의 분모에 있는 $\cos x$와 약분되어 $\sin^2 x$의 쉬운 적분만 남는다.

경계항은 $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 2$이다. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$를 이용하면

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}.$$

따라서

$$I_2 = -\tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}\left(\pi - 2\ln 2 - 2\right) = \tfrac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

마지막 적분

마지막 적분을 I라 하자. 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin x \sin \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

이로부터 치환 $t = x - \frac{1}{4}\pi$를 떠올릴 수 있다. 이 치환은 구간 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$를 I_1과 I_2의 적분 구간인 $[0, \frac{1}{4}\pi]$로 옮긴다. $2x = 2t + \frac{1}{2}\pi$이므로

$$\cos 2x = \cos\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin 2t, \qquad \sin 2x = \sin\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos 2t,$$

이고

$$\ln(\cos x + \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos t\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t),$$

이다. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\cos t > 0$이므로 이 식은 성립한다. 그러므로

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t) \, \mathrm{d}t + I_2 - I_1. \end{aligned}$$

남은 적분은 0이 된다.

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

따라서 앞의 두 결과를 이용하면

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) - \tfrac{1}{8}(2\ln 2 - 2) = \frac{\pi - 4\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $I_1 \approx -0.076713$, $I_2 \approx -0.030588$, $I \approx 0.046125$이며, 이는 각각 $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$, $\frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2)$, $\frac{1}{8}(\pi - 4\ln 2)$와 소수점 아래 열 자리까지 일치한다. 첫 번째 적분의 부호도 간단히 확인해 보자. $(0, \frac{1}{4}\pi)$에서 $\sin 2x > 0$이고 $\ln(\cos x) < 0$이므로 I_1은 음수여야 하며, 실제로 $\ln 2 - 1 < 0$이다.

흔한 실수

- I_2의 부분적분에서 경계항을 빠뜨리는 실수. 경계항은 $x = \frac{1}{4}\pi$에서 0이 아니다.
- $\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$와 $\sin(2t + \frac{1}{2}\pi)$의 부호를 뒤바꾸어 $I_2 - I_1$ 대신 $I_1 - I_2$나 $I_1 + I_2$를 얻는 실수.
- 상수 $\ln\sqrt{2}$에서 나온 $\frac{1}{2}\ln 2$의 계수를 적분하면 0이 된다는 것을 확인하지 않고 이 상수를 버리는 실수.

STEP 너머

$\ln(\cos x)$와 $\ln(\sin x)$의 적분은 고전적인 주제이다. 같은 대칭성 기법을 쓰면 유명한 결과 $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$를 얻으며, 일반적인 구간에서는 클라우센 함수(Clausen function)와 카탈랑 상수(Catalan's constant)로 이어진다. 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 로그가 적분 구간의 끝점에서 발산할 때 이러한 적분이 잘 정의되는지도 확인하는데, 이 경우 이 적분들은 이상적분(improper integral)이 된다. 이런 유형의 문제를 더 많이 연습하려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.