풀이

STEP I 2012, 문제 4

순수수학 • 접선과 법선

> **STEP I 2012, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q4

핵심 아이디어

모든 것은 $y = \frac{1}{2x}$의 기울기(gradient)와 신중한 소거(elimination)에서 나온다. p와 q를 서로 바꾼 것만 다른 두 직선의 교점을 구할 때, 두 방정식을 빼면 언제나 인수 $p - q$가 생기며, 두 점이 서로 다르므로 이 인수로 약분할 수 있다. 특수한 경우에는 조건이 Q에 무엇을 하는지 알아차리는 것이 도움이 된다. 그 조건은 Q를 직선 $y = x$에 대한 P의 대칭점(mirror image)으로 만들며, 바로 이 대칭성 때문에 T와 N이 그 직선 위에 놓이게 된다.

풀이

점 T

C 위에서 $y = \dfrac{1}{2x}$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2x^2}$이다. 따라서 P에서의 접선(tangent)은 기울기가 $-\frac{1}{2p^2}$이고 방정식은

$$y - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{2p^2}(x - p).$$

이다. 양변에 $2p^2$을 곱하면 $2p^2y - p = -x + p$, 즉

$$x + 2p^2y = 2p. \tag{1}$$

이다. 같은 방법으로 Q에서의 접선은

$$x + 2q^2y = 2q. \tag{2}$$

이다. (1)에서 (2)를 빼면

$$2(p^2 - q^2)\,y = 2(p - q).$$

이다. 두 점이 서로 다르므로 $p \neq q$이고, 따라서 $2(p-q)$로 나누어 $(p+q)y = 1$을 얻는다. $p, q > 0$이므로 $p+q \neq 0$이고, 따라서

$$y = \frac{1}{p+q}.$$

이다. 이를 (1)에 대입하면

$$x = 2p - \frac{2p^2}{p+q} = \frac{2p(p+q) - 2p^2}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

이다. 그러므로 T는 점 $\left(\frac{2pq}{p+q}, \frac{1}{p+q}\right)$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

$pq = \frac{1}{2}$일 때의 점 N

P에서의 법선(normal)은 접선에 수직이므로 기울기가 $2p^2$이고, 방정식은

$$y = 2p^2 x - 2p^3 + \frac{1}{2p}. \tag{3}$$

이다. 마찬가지로 Q에서의 법선은 $y = 2q^2 x - 2q^3 + \frac{1}{2q}$이다. y에 대한 두 식을 같다고 놓으면

$$2(p^2 - q^2)\, x = 2(p^3 - q^3) - \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) = 2(p^3 - q^3) + \frac{p-q}{2pq}.$$

이다. $2(p-q) \neq 0$으로 나누면

$$(p+q)\, x = p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{4pq}.$$

이다. 이 식은 서로 다른 임의의 p와 q에 대해 성립한다. 이제 $pq = \frac{1}{2}$를 이용하면 $\frac{1}{4pq} = \frac{1}{2} = pq$이므로 우변은

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2.$$

이 된다. 따라서 $x = p+q$이다. 이를 (3)에 대입하면

$$y = 2p^2(p+q) - 2p^3 + \frac{1}{2p} = 2p^2 q + \frac{1}{2p} = p\,(2pq) + q = p + q,$$

이다. 여기서 $2pq = 1$을 두 번 사용했다. 즉 $2p^2 q = p(2pq) = p$이고 $\frac{1}{2p} = q$이다. 그러므로

$$N = (p+q,\ p+q).$$

이다. ($p \neq q$와 $pq = \frac{1}{2}$를 함께 생각하면 $p \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$이며, 이것이 p에 대한 유일한 제약이다.)

생각해 보기 도대체 왜 T와 N이 $y = x$ 위에 놓여야 할까?

$pq = \frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{2q} = p$이고 $\frac{1}{2p} = q$이므로 $P = (p, q)$, $Q = (q, p)$이다. 곡선 $xy = \frac{1}{2}$는 $y = x$에 대한 반사(reflection)에 대해 대칭이고, 이 반사는 P와 Q를 서로 바꾼다. 따라서 이 반사는 두 접선을 서로 바꾸고 두 법선도 서로 바꾸므로, 각 교점은 자기 자신으로 옮겨진다. 그리고 이 반사에 의해 고정되는 점은 $y = x$ 위에 있다. 대수적 계산이 이를 확인해 준다.

$y = x$ 위의 T와 N, 그리고 거리의 곱

$2pq = 1$이면 T에 대한 결과로부터

$$T = \left(\frac{1}{p+q}, \frac{1}{p+q} \right),$$

을 얻는데, 이 점은 $y = x$ 위에 있다. 또한 앞에서 구한 $N = (p+q,\ p+q)$도 $y = x$ 위에 있다.

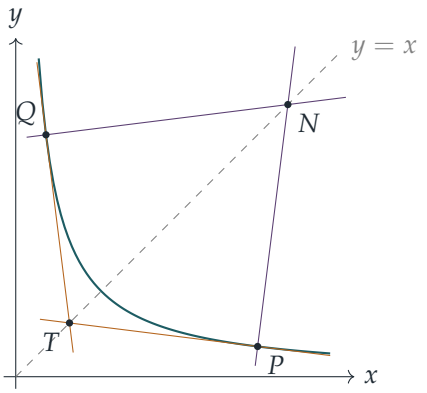
$a > 0$인 점 (a, a)는 원점으로부터 거리가 $\sqrt{2}\,a$이다. $p + q > 0$이므로

$$OT = \frac{\sqrt{2}}{p+q}, \qquad ON = \sqrt{2}\,(p+q),$$

이고, 따라서

$$OT \cdot ON = 2,$$

이다. 이 값은 (p와 무관한) 상수이므로 증명이 끝난다.



그림은 $p = 2, q = \frac{1}{4}$인 경우를 나타낸다. 접선은 호박색, 법선은 자두색으로 그렸다.

검산

$p = 2, q = \frac{1}{4}$로 두면 $pq = \frac{1}{2}$이다. 접선은 $x + 8y = 4$와 $8x + y = 4$이고, 두 직선은 $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$에서 만나며, 이는 $\frac{1}{p+q} = \frac{4}{9}$와 일치한다. 법선은 $y = 8x - \frac{63}{4}$와 $y = \frac{x}{8} + \frac{63}{32}$이고, 두 직선은 $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$에서 만나며, 이는 $p + q = \frac{9}{4}$와 일치한다. 그러면 $OT \cdot ON = \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = 2$이다. 또한 T에 대한 일반 공식과 특수한 경우의 두 결과를, p와 q를 무작위로 2000번 골라 정확한 유리수 연산으로 확인하였다.

흔한 실수

- 왜 허용되는지 밝히지 않고 $p - q$로 나누는 것. 바로 이 지점에서 "서로 다른 두 점"이라는 조건이 쓰인다.
- N을 구할 때 $\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p} = \frac{p-q}{2pq}$에서 부호를 틀리는 것.
- T가 $y = x$ 위에 있다고 주장하기 전에 $pq = \frac{1}{2}$를 이용해 T를 간단히 하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

직각쌍곡선(rectangular hyperbola) $xy = c^2$은 원뿔곡선(conic)이며, $OT \cdot ON$이 상수라는 사실은 T와 N이 원 $x^2 + y^2 = 2$에 대한 **반전점**(*inverse points*)이라는 뜻이다. 원에 대한 반전(inversion)은 기하학과 복소해석학(complex analysis)에서 강력한 변환이며, 복소해석학에서는 사상 $z \mapsto 1/\bar{z}$로 나타난다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 반전과 그 기하학적 성질에 대한 아름다운 설명이 담겨 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.