풀이

STEP I 2012, 문제 3

순수수학 • 넓이에서 얻는 부등식

> **STEP I 2012, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q3

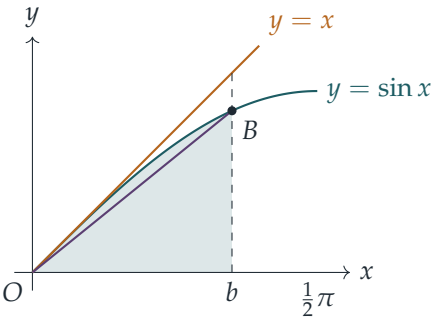
핵심 아이디어

한 방향으로만 계속 휘는 곡선은 각 접선(tangent)의 한쪽에 놓이고, 각 현(chord)의 반대쪽에 놓인다. 따라서 곡선 아래의 넓이는 접선 아래의 넓이와 현 아래의 넓이 사이에 끼이게 되며, 이 두 넓이는 모두 삼각형이나 사다리꼴(trapezium)의 넓이일 뿐이다. 각 넓이를 정확히 적으면 부등식이 저절로 나온다. 실제로 해야 할 일은 어느 접선과 어느 현을 쓸지 정하는 것뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$이므로, 이 구간에서 곡선 $y = \sin x$는 오목(concave)하다. 즉 아래쪽으로 휜다. 원점에서의 접선은 기울기가 $\cos 0 = 1$이므로 직선 $y = x$이다. O에서 $B = (b, \sin b)$까지의 현은 직선 $y = \dfrac{\sin b}{b}\,x$이다.



오목하다는 것은 O와 B 사이에서 곡선이 현보다 엄격히 **위**에 있고, $x > 0$에서는 O에서의 접선보다 엄격히 **아래**에 있다는 뜻이다. 따라서 $0 < x < b$에 대하여

$$\frac{\sin b}{b}\, x \;<\; \sin x \;<\; x.$$

이제 $0 \le x \le b$에서 세 넓이를 비교한다.

- 곡선 아래(색칠한 부분): $\displaystyle\int_0^b \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos b$.
- 접선 아래: 밑변이 b이고 높이가 b인 직각삼각형으로, 넓이는 $\frac{1}{2}b^2$이다.
- 현 아래: 밑변이 b이고 높이가 $\sin b$인 삼각형으로, 넓이는 $\frac{1}{2}b\sin b$이다.

$0 < x < b$에서 곡선이 두 직선 사이에 엄격히 놓여 있으므로(그리고 세 함수 모두 연속이므로), 넓이는 엄격한 부등식을 만족한다.

$$\tfrac{1}{2}b\sin b \;<\; 1 - \cos b \;<\; \tfrac{1}{2}b^2.$$

오른쪽 부등식을 정리하면 $\cos b > 1 - \frac{1}{2}b^2$이고, 왼쪽 부등식을 정리하면 $\cos b < 1 - \frac{1}{2}b\sin b$이다. 이를 합치면

$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 < \cos b < 1 - \tfrac{1}{2}b\sin b,$$

이므로 증명하려던 식이 성립한다.

소문항 (ii)

$k = \ln a$라 하자. $a > 1$이므로 $k > 0$이고, $a^x = \mathrm{e}^{kx}$이다. 그러면

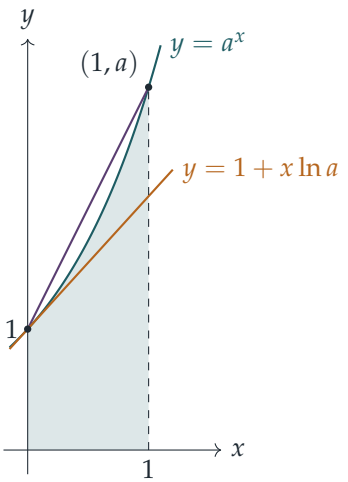
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = k\,\mathrm{e}^{kx}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a^x = k^2\mathrm{e}^{kx} > 0,$$

이므로 이 곡선은 볼록(convex)하다. 즉 위쪽으로 휜다. 이제 역할이 바뀐다. 곡선은 현보다 엄격히 **아래**에 있고, (접점을 제외하면) 접선보다 엄격히 **위**에 있다.

> ? **생각해 보기** 어느 구간에서 넓이를 비교해야 할까?

답에는 $\ln a$와 a만 들어가야 하고 다른 것은 들어가면 안 된다. 구간 $0 \le x \le 1$이 정확히 이 조건을 만족한다. 곡선의 양 끝점은 $(0,1)$과 $(1,a)$이고, 곡선 아래의 넓이는

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^k - 1}{k} = \frac{a-1}{\ln a}.$$



하계(현). $(0,1)$에서 $(1,a)$까지의 현은 $0<x<1$에서 곡선보다 위에 있고, 그 아래 영역은 폭이 1이고 평행한 두 변의 길이가 1과 a인 사다리꼴로, 넓이는 $\frac{1}{2}(1+a)$이다. 따라서

$$\frac{a-1}{\ln a} < \frac{a+1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \ln a > \frac{2(a-1)}{a+1},$$

이다. 여기서 양변에 양수 $2\ln a/(a+1)$을 곱했으므로 부등호의 방향은 그대로 유지된다.

상계(접선). $(0,1)$에서의 접선은 기울기가 $k=\ln a$이므로 $y=1+kx$이다. 이 접선은 $x>0$에서 곡선보다 아래에 있고, $[0,1]$에서 그 아래 영역은 평행한 두 변의 길이가 1과 $1+k$인 사다리꼴로, 넓이는 $1+\frac{1}{2}k$이다. 따라서

$$1+\tfrac{1}{2}k < \frac{a-1}{k}.$$

양변에 $2k>0$을 곱하면

$$2k+k^2 < 2a-2 \quad\Longleftrightarrow\quad k^2+2k+1 < 2a-1 \quad\Longleftrightarrow\quad (k+1)^2 < 2a-1.$$

생각해 보기 그냥 제곱근을 취해도 될까?

그렇다. 다만 양변이 모두 양수이기 때문에 가능하다. $2a-1>1>0$이고, $k>0$이므로 $k+1>0$이다. 양수에 대해서는 $u^2<v^2$이면 $u<v$이므로 $k+1<\sqrt{2a-1}$, 즉

$$\frac{2(a-1)}{a+1} < \ln a < -1+\sqrt{2a-1},$$

이고, 이것으로 증명이 끝난다.

검산

- 소문항 (i)에서 $b=1$일 때: $1-\frac{1}{2}=0.5$, $\cos 1\approx 0.5403$, $1-\frac{1}{2}\sin 1\approx 0.5793$이다. 주장한 대로 크기 순서가 맞다.

- 소문항 (ii)에서 $a = 2$일 때: $\frac{2}{3} \approx 0.6667$, $\ln 2 \approx 0.6931$, $\sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$이다. 역시 크기 순서가 맞다.
- $a \to 1$일 때 소문항 (ii)의 세 식은 모두 0으로 수렴하며, 서로 바짝 붙는다. $a = 1.01$에서는 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치한다. 짧은 구간에서 매끄러운 곡선은 거의 직선이므로 이는 당연하다.
- 두 부등식 사슬을 수천 개의 무작위 값에서 확인했고, 넓이 공식은 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인했다.

흔한 실수

- 위아래를 거꾸로 생각하는 것: 사인 곡선은 오목하고(접선보다 아래, 현보다 위), a^x는 볼록하다(그 반대). 그림에 의존하지 말고 이계도함수(second derivative)로 이를 정당화해야 한다.
- 부등식에 $\ln a$를 곱하거나 나눌 때 $\ln a > 0$임을 잊는 것.
- $k + 1 > 0$임을 확인하지 않고 $(k+1)^2 < 2a - 1$의 양변에 제곱근을 취하는 것.

STEP 너머

현을 이용한 부등식은 일반적인 원리의 한 예이다. 볼록함수에 대하여, 구간에서의 평균값은 중점에서의 함숫값과 양 끝점에서의 함숫값의 평균 사이에 있다(에르미트–아다마르 부등식(Hermite–Hadamard inequality). 끝점 대신 중점에서의 접선을 쓰면 더 정밀한 하계를 얻는다). 소문항 (ii)의 하계는 a와 1의 로그 평균(logarithmic mean) $(a-1)/\ln a$가 두 수의 산술평균(arithmetic mean)보다 작다는 것을 말해 준다. 이 사실은 해석학 전반과 물리학에서 두루 등장한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 볼록함수와 적분을 이용한 어림을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.