풀이

STEP I 2012, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기와 근

> **STEP I 2012, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q2

핵심 아이디어

$p(x) = 0$의 실근(real roots)의 개수를 세는 것은 $y = p(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 세는 것과 같고, 상수항을 반대쪽으로 옮기면 고정된 곡선이 수평선과 만나는 점의 개수를 세는 것과 같다. 따라서 이 문제는 결국 사차함수(quartic)의 개형을 아는 문제이다. 즉 어디에서 방향이 바뀌는지, 그리고 그때 얼마나 높거나 낮은지를 알아야 한다. 소문항 (i)에서는 사차식이 완전제곱식이고, 소문항 (ii)에서는 도함수(derivative)에 대한 조건 때문에 $\frac{dy}{dx}$가 중근(repeated root)을 갖도록 인수분해되어 극점(turning point)이 하나만 남는다.

풀이

소문항 (i)

먼저 다음을 관찰한다.

$$y = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2,$$

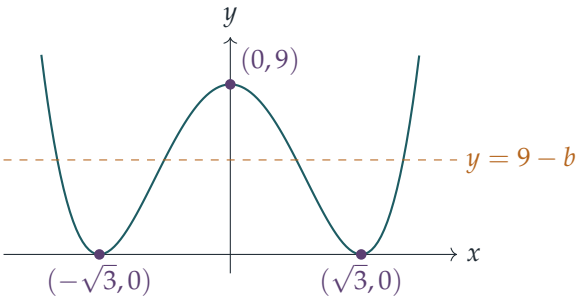
따라서 모든 곳에서 $y \geq 0$이고, $y = 0$이 되는 것은 정확히 $x = \pm\sqrt{3}$일 때이다. 이 곡선은 우함수(even)의 그래프이고(y축에 대하여 대칭), y축과 $(0, 9)$에서 만난다. 미분하면

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3),$$

이고, 이는 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{3}$에서 0이 된다. 따라서 정류점(stationary point)은 다음과 같다.

$$(0,\, 9)\ (\text{극대점}), \qquad (\sqrt{3},\, 0) \text{ 과 } (-\sqrt{3},\, 0)\ (\text{극소점}).$$

$y \geq 0$이고 그 점들에서 $y = 0$이므로 극소점(minima)임은 분명하다. 또 이계도함수(second derivative) $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12$는 $x = 0$에서 $-12 < 0$이므로 그 점은 극대점(local maximum)이다. $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이다. 이 곡선은 $x = \pm\sqrt{3}$에서 x축에 접하는 "W" 모양이다.



근의 개수를 세기 위해 양변에 9를 더한다.

$$x^4 - 6x^2 + b = 0 \iff (x^2 - 3)^2 = 9 - b.$$

따라서 n은 수평선 $y = 9 - b$가 방금 그린 곡선과 만나는 횟수이다. 이 직선을 위에서 아래로 움직이면서 그림을 읽으면 다음과 같다.

- $9 - b > 9$, 즉 $b < 0$: 직선이 극댓값보다 위에 있어 바깥쪽 두 갈래하고만 만나므로 $n = 2$이다.
- $9 - b = 9$, 즉 $b = 0$: 직선이 극대점을 지나므로 $x = 0$과 바깥쪽 두 점이 생긴다. 실제로 $x^2(x^2 - 6) = 0$에서 $x = 0, \pm\sqrt{6}$이다. 따라서 $n = 3$이다.
- $0 < 9 - b < 9$, 즉 $0 < b < 9$: 직선이 네 개의 단조(monotonic) 구간을 각각 한 번씩 자르므로 $n = 4$이다.
- $9 - b = 0$, 즉 $b = 9$: 직선이 두 극소점 $x = \pm\sqrt{3}$에서만 접하므로 $n = 2$이다.
- $9 - b < 0$, 즉 $b > 9$: 직선이 곡선 아래에 있으므로 $n = 0$이다.

이를 정리하면 다음과 같다.

(a) $n = 0 \iff b > 9$; (b) $n = 1$ 은 불가능, 어떤b; (c) $n = 2 \iff b < 0$ 또는$b = 9$;

(d) $n = 3 \iff b = 0$; (e) $n = 4 \iff 0 < b < 9$.

$n = 1$이 불가능하다는 것은 대칭성(symmetry)으로도 알 수 있다. x가 근이면 $-x$도 근이므로, 근이 하나뿐이라면 그것은 $x = 0$이어야 하고, 그러면 $b = 0$이 되어 근이 세 개가 된다.

소문항 (ii)

이제 $y = x^4 - 6x^2 + ax + b$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x + a, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12.$$

이계도함수는 $x = \pm 1$에서만 0이 된다. $x = 1$에서 도함수의 값은 $a - 8$이고, $x = -1$에서는 $a + 8$이다. 따라서 두 도함수가 같은 점에서 동시에 0이 되는 것은 정확히 다음의 경우이다.

$$a = 8 \text{ (위치: } x = 1) \qquad \text{또는} \qquad a = -8 \text{ (위치: } x = -1).$$

$a = 8$인 경우. 이때

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)^2(x+2),$$

이다. 여기서 인수 $(x-1)^2$를 찾을 수 있었던 것은 $x = 1$이 y'과 y''의 공통근, 즉 y'의 중근이 되도록 만들었기 때문이다.

생각해 보기 이 곡선에는 실제로 극점이 몇 개 있는가?

$(x-1)^2 \geq 0$이므로 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 부호는 $x + 2$의 부호와 같다. 따라서 y는 $x < -2$에서 순감소하고 $x > -2$에서 순증가한다($x = 1$에서 기울기가 0이지만 부호가 바뀌지 않으므로, 그 점은 극점이 아니라 정류 변곡점(stationary point of inflection)이다). 극점은 $x = -2$에서의 최솟값(global minimum) 하나뿐이고, 그 값은

$$y(-2) = 16 - 24 - 16 + b = b - 24.$$

하나의 최솟값까지 내려갔다가 다시 올라가는 곡선은 최솟값이 축 아래에 있으면 x축과 두 번 만나고, 축 위에 있으면 한 번 (접하며) 만나고, 축보다 위에 있으면 만나지 않는다. 따라서 서로 다른 실근의 개수는

$$\begin{cases} 2 & \text{만약} b < 24, \\ 1 & \text{만약} b = 24, \\ 0 & \text{만약} b > 24. \end{cases}$$

($b = 24$일 때 중근을 직접 확인할 수 있다. $x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$이고, 이차식의 판별식(discriminant)은 $16 - 24 < 0$이다.)

$a = -8$인 경우. x를 $-x$로 바꾸면 $x^4 - 6x^2 - 8x + b$가 $x^4 - 6x^2 + 8x + b$로 바뀌므로, 이 곡선은 앞의 곡선을 y축에 대하여 대칭이동(reflection)한 것이다. 유일한 최솟값은 이제 $x = 2$에서 나타나고 그 값은 $b - 24$이며, 근의 개수도 같다. 즉 $b < 24$이면 2, $b = 24$이면 1, $b > 24$이면 0이다.

소문항 (iii)

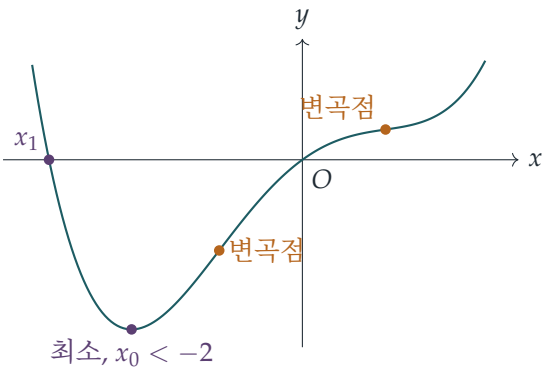
$a > 8$일 때 $y = x^4 - 6x^2 + ax$를 생각한다.

정류점. $\frac{dy}{dx} = 0$은 $x^3 - 3x = -\frac{a}{4}$를 뜻한다. 삼차함수 $g(x) = x^3 - 3x$는 극댓값 $g(-1) = 2$와 극솟값 $g(1) = -2$를 가지며, $g(-2) = -2$이다. $-\frac{a}{4} < -2$이므로 높이 $-\frac{a}{4}$의 수평선은 g의 극솟값보다 아래에 있고, 따라서 g와 정확히 한 번, $x < -2$인 왼쪽 갈래에서 만난다. 그러므로 정류점은 어떤 $x_0 < -2$에서 정확히 하나 존재한다. 그 왼쪽에서는 기울기가 음수이고 오른쪽에서는 양수이므로, 이 점은 최솟값을 준다.

x축과의 교점. $y = x(x^3 - 6x + a)$이므로 $x = 0$이 교점 하나이고, 나머지는 $h(x) = x^3 - 6x + a$의 근이다. 이 삼차함수는 $x = \sqrt{2}$에서 극솟값을 가지며, $a > 8 > 4\sqrt{2}$이므로 $h(\sqrt{2}) = a - 4\sqrt{2} > 0$이다. 따라서 h의 실근은 하나뿐이고, $h(0) = a > 0$이므로 그 근은 음수이다. 사실 $h(-2) = a + 4 > 0$이고 h는 $x < -\sqrt{2}$에서 증가하므로, 이 근 x_1은 $x_1 < -2$를 만족한다. 곡선은 x_1과 원점에서 축을 지나고, 그 사이에서는 음수이며, 최솟점은 이 구간 안에 있다.

그 밖의 특징. 원점에서의 기울기는 $a > 0$이다. 이계도함수 $12(x^2 - 1)$은 $x = \pm 1$에서 부호가 바뀌므로 $(-1, -a - 5)$와 $(1, a - 5)$에서 변곡점(point of inflection)을 갖는다. 그 점들에서의 기울기는 $a + 8$과 $a - 8$로 모두 양수이므로, 곡선은 그 점들을 지나면서도 계속 올라간다. 곡선은 $-1 < x < 1$에서 위로 볼록(concave down)이고 그 바깥에서는 아래로 볼록(concave up)이다. $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이다.

아래 그림은 $a = 10$인 경우로, $x_0 \approx -2.05$, 최솟값은 약 -28, $x_1 \approx -3.05$이다.



검산

- 소문항 (i)에서 $b = 5$이면 근이 네 개여야 한다. $x^2 = 3 \pm 2$이므로 $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$이다. 실제로 그렇다.
- 소문항 (ii)에서 $b = 24$이면 인수분해 $(x + 2)^2(x^2 - 4x + 6)$이 나오므로, 최솟점에서 근

이 하나(중근)임이 확인된다.

- 수치적으로, 0, 9, 24의 양쪽에 있는 여러 b의 값에 대해 사차식의 모든 복소근을 구하고 서로 다른 실근의 개수를 세었더니 모두 일치했다. 8과 200 사이의 무작위 a에 대해, (iii)의 곡선은 항상 정류점이 하나, 축과의 교점이 두 개였고 $x_1 < x_0 < -2$였다. $a = 10$일 때 $x_0 \approx -2.054$, $y(x_0) \approx -28.05$이다.

흔한 실수

- ($b = 9$일 때) $x = \pm\sqrt{3}$에서의 중근을 근 네 개로 세는 것. 문제는 **서로 다른** x의 값을 묻고 있다.
- 소문항 (ii)에서 $y' = y'' = 0$인 점을 극점으로 여기는 것. 그 점에서 y'은 제곱 인수를 가지므로 부호가 바뀌지 않으며, 따라서 정류 변곡점이다.
- $a = -8$을 빠뜨리는 것. $y'' = 0$의 해는 두 개이고, 각각이 a의 값 하나를 준다.

STEP 너머

b가 0, 9 또는 24를 지날 때 실근의 개수가 갑자기 바뀌는 현상은 **분기**(bifurcation)의 작은 예이다. 답은 수평선이 정류값을 지날 때에만 바뀐다. 소문항 (ii)의 특수한 경우 $y' = y'' = 0$은 두 정류점이 합쳐져 사라지는 지점으로, 가장 단순한 "파국"(catastrophe), 즉 접힘(fold)이며, $a > 8$이 되면 (iii)의 사차함수가 극점을 하나만 갖는 이유이기도 하다. 같은 추론을 중간값 정리(intermediate value theorem)와 단조성(monotonicity)으로 엄밀하게 만드는 것이 실해석학(real analysis)의 출발점이다. 이를 신중하게 다루는 과정을 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.