풀이

STEP I 2012, 문제 12

확률과 통계 • 조건부 확률

> **STEP I 2012, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q12

핵심 아이디어

모든 것은 소화기가 몇 번째 해에 결함이 생기는지에 달려 있으므로, 먼저 확률밀도함수(density)를 누적분포함수(cumulative distribution function)로 바꾸고, 결함이 첫째 해, 둘째 해, 셋째 해에 생길 확률을 읽어 낸다. 결함이 생긴 해를 알고 나면 검사는 독립(independent)인 통과가 몇 번 이어진 뒤 불합격이 한 번 나오는 과정일 뿐이다. 마지막 부분은 조건부확률(conditional probability)이며, "18개월 시점에 결함이 있다"는 사건 역시 T가 어느 구간에 놓이는지에 대한 진술이다.

풀이

T의 분포

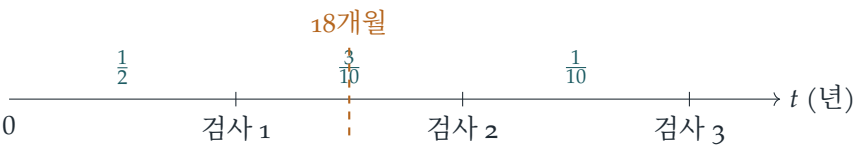
$t \geq 0$에 대하여 $u = 1 + s^2$으로 치환하면 ($\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$이므로)

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t \frac{2s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

따라서 $F(1) = \frac{1}{2}$, $F(2) = \frac{4}{5}$, $F(3) = \frac{9}{10}$이고

$$\mathrm{P}(0 < T < 1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(1 < T < 2) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(2 < T < 3) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}.$$

T는 연속(continuous)이므로 결함이 정확히 검사일에 생길 확률은 0이다. 따라서 끝점에서 $<$를 쓰는지 $\leq$를 쓰는지는 신경 쓸 필요가 없다.



제조 후 정확히 3년 만에 폐기될 확률

소화기가 제조 3년 후의 검사에서 폐기되는 사건을 D라 하자. 이 사건이 일어나려면 셋째 검사 전에 결함이 생겨야 하고 (즉 $T < 3$), 그 전까지 결함이 있는 상태에서 받은 모든 검사를 통과해야 하며, 셋째 검사에서 불합격해야 한다. 결함이 없는 소화기는 항상 통과하므로 시각 T 이후의 검사만 중요하며, 이 검사들은 서로 독립이고 불합격 확률이 p이다.

- $0 < T < 1$인 경우: 검사 1, 2, 3에서 모두 결함이 있으므로 통과, 통과, 불합격이어야 한다. 확률은 $(1-p)^2 p$이다.
- $1 < T < 2$인 경우: 검사 1은 자동으로 통과하고, 검사 2를 통과한 뒤 검사 3에서 불합격해야 한다. 확률은 $(1-p)p$이다.
- $2 < T < 3$인 경우: 검사 1과 2는 자동으로 통과하고, 검사 3에서 불합격해야 한다. 확률은 p이다.

$T > 3$이면 검사 3에서 결함이 없으므로 그때 폐기될 수 없다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{3}{10}(1-p)p + \tfrac{1}{10}p \\ &= \frac{p}{10}\Big(5(1-2p+p^2) + 3(1-p) + 1\Big) \\ &= \frac{p\,(5p^2 - 13p + 9)}{10}, \end{aligned}$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

3년 만에 폐기되었을 때 18개월 시점에 결함이 있었을 확률

소화기가 제조 18개월 후에 결함이 있었던 사건, 즉 $T < \frac{3}{2}$인 사건을 E라 하자. 구하려는 것은

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{\mathrm{P}(E \cap D)}{\mathrm{P}(D)}.$$

생각해 보기 구간 $(0, \frac{3}{2})$는 검사 하나를 사이에 걸치고 있다. 이 구간을 어떻게 나눌까?

검사에서 중요한 것은 결함이 생긴 해이므로, E를 $0 < T < 1$과 $1 < T < \frac{3}{2}$로 나눈다.

$F(\frac{3}{2}) = \dfrac{9/4}{13/4} = \dfrac{9}{13}$이므로

$$\mathrm{P}\left(1 < T < \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{9}{13} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{26}.$$

$0 < T < 1$일 때 D의 확률은 앞에서와 같이 $(1-p)^2 p$이고, $1 < T < \frac{3}{2}$일 때에도 결함은 여전히 둘째 해에 생기므로 D의 확률은 $(1-p)p$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \cap D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{5}{26}(1-p)p \\ &= \frac{p(1-p)}{26}\big(13(1-p)+5\big) = \frac{p(1-p)(18-13p)}{26}.\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(D)$로 나누면 (이 값은 $0 < p \le 1$에서 양수이다. $5p^2 - 13p + 9$의 판별식(discriminant)이 $169 - 180 < 0$이므로 이 식은 항상 양수이기 때문이다) 인수 p가 약분되어

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{10(1-p)(18-13p)}{26(5p^2-13p+9)} = \frac{5(1-p)(18-13p)}{13(5p^2-13p+9)}.$$

검산

- $p = 1$이면 결함이 있는 소화기는 모두 결함이 생긴 뒤 첫 검사에서 폐기되므로, 3년째에 폐기되었다는 것은 결함이 $(2,3)$에서 생겼다는 뜻이다. 즉 $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{10}$이고 $\mathrm{P}(E \mid D) = 0$이다. 두 공식 모두 이와 일치한다.
- $p \to 0$이면 $\mathrm{P}(E \mid D) \to \dfrac{5 \cdot 18}{13 \cdot 9} = \dfrac{10}{13}$이고, 이는 $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2} \mid T < 3) = \dfrac{9/13}{9/10}$이다. 검사가 결함을 거의 잡아내지 못할 때에는 폐기되었다는 사실이 $T < 3$ 이상의 정보를 거의 주지 않는다.
- $p = 0.4$로 소화기 10^6개를 모의실험한 결과 $\mathrm{P}(D) \approx 0.1838$ (정확한 값 0.184), $\mathrm{P}(E \mid D) \approx 0.642$ (정확한 값 $\frac{192}{299} \approx 0.642$)를 얻었다.

흔한 실수

- 결함이 있는 소화기가 셋째 검사에서 불합격하기 전에 앞선 검사들을 **통과**해야 한다는 점을 잊는다.
- 마지막 부분에서 $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2}) = \frac{9}{13}$을 한 덩어리로 사용한다. 첫째 해에 생긴 결함과 둘째 해 전반기에 생긴 결함은 받게 되는 검사 횟수가 다르다.

STEP 너머

여기서 T는 연속적인 수명이지만, 우리는 이를 이산적이고 불완전한 검사를 통해서만 관찰한다. 이는 생존 분석(survival analysis)과 신뢰성 이론(reliability theory)에서 다루는 **구**

간 중도절단(*interval-censored*) 자료의 상황이며, 마지막 부분은 작은 베이즈 갱신(Bayesian update)이다. 즉 관찰된 불합격에 비추어 T의 사전분포(prior distribution)를 수정하는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 연속분포와 이런 종류의 조건부 확률을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.