풀이

STEP I 2012, 문제 11

역학 • 도르래와 마찰

> **STEP I 2012, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q11

핵심 아이디어

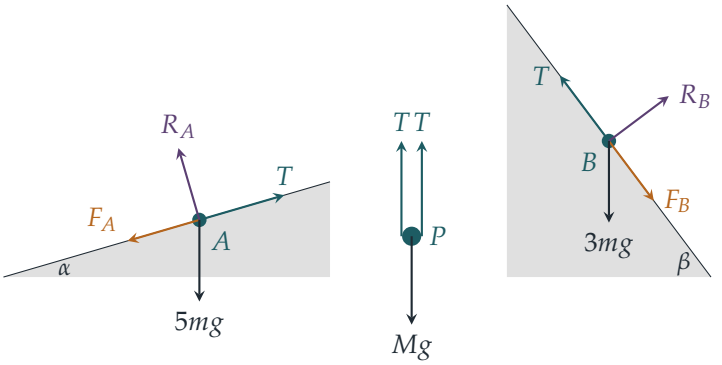
모든 도르래(pulley)가 매끄럽고(smooth) 줄이 가벼우므로(light), 장력(tension)은 줄 전체에서 같다. 따라서 각 질점(particle)마다 장력과 마찰력(friction)을 잇는 방정식이 하나씩 나오고, 도르래 P에서 세 번째 방정식이 나온다. 각은 $7, 24, 25$ 삼각형과 $3, 4, 5$ 삼각형에서 골랐으므로 사인과 코사인 값이 모두 정확한 분수이다. 움직이는 경우에는 한 가지가 더 필요하다. 줄의 길이가 일정하다는 사실 때문에 A, B, P의 가속도(acceleration)가 서로 어떻게 묶이는지 알아야 한다.

풀이

A, B를 질점으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로 모형화한다. 도르래 Q와 R는 매끄럽고 가벼우며 고정되어 있고, P는 매끄러우며 질량이 M이다. $\alpha = \arctan\frac{7}{24}$, $\beta = \arctan\frac{4}{3}$이라 하자. 세 변이 $7, 24, 25$와 $3, 4, 5$인 직각삼각형에서

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

장력을 T라 하자. 모든 도르래가 매끄러우므로 T는 줄의 모든 부분에서 같다.



두 소문항 모두에서 질점들은 각자의 경사면을 따라 **위로** 움직이기 직전이거나 움직이고 있으므로, 그림처럼 마찰력은 각 경사면을 따라 **아래로** 작용한다. 경사면에 수직인 방향으로 힘을 분해하면

$$R_A = 5mg\cos\alpha = \tfrac{24}{5}mg, \qquad R_B = 3mg\cos\beta = \tfrac{9}{5}mg.$$

소문항 (i)

두 질점 모두 미끄러지기 직전이므로 마찰력은 최대 정지 마찰력(limiting friction)이다. 즉 $F_A = \mu R_A$, $F_B = \mu R_B$이다. 각 경사면을 따라 힘을 분해하면 (평형 상태):

$$\begin{aligned} A: &\quad T = 5mg\sin\alpha + \mu R_A = \tfrac{mg}{5}(7 + 24\mu), \\ B: &\quad T = 3mg\sin\beta + \mu R_B = \tfrac{mg}{5}(12 + 9\mu). \end{aligned}$$

두 식을 같게 놓으면 $7 + 24\mu = 12 + 9\mu$이므로

$$\mu = \tfrac{1}{3},$$

이고, 따라서 $T = \frac{mg}{5}(7 + 8) = 3mg$이다.

도르래 P는 위로 당기는 연직 방향의 두 줄과 아래로 당기는 무게에 의해 평형을 이루므로

$$2T = Mg \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2 \cdot 3mg}{g} = 6m,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

이제 $M = 9m$이다. 이는 한계 평형(limiting equilibrium)에서 겨우 지탱할 수 있는 $6m$보다 무거우므로, P가 내려가면서 두 질점을 각자의 경사면 위로 끌어올릴 것으로 예상된다.

? **생각해 보기** 세 가속도는 서로 어떤 관계에 있을까?

A와 B의 경사면 위쪽 방향 가속도를 각각 a와 b라 하고, P의 아래쪽 방향 가속도를 p라 하자. 줄의 길이 $AQ + QP + PR + RB$는 일정하다. A가 경사면을 따라 위로 x만큼, B가 경사면을 따라 위로 y만큼 움직이면 AQ와 RB는 각각 x와 y만큼 짧아진다. P가 z만큼 내려가면 QP와 PR는 각각 z만큼 길어진다. 따라서 언제나 $2z = x + y$이고, 이를 두 번 미분하면

$$2p = a + b.$$

$\mu = \frac{1}{3}$이므로 위로 미끄러지는 동안의 마찰력은 A에서 $\frac{1}{3}R_A = \frac{8}{5}mg$, B에서 $\frac{1}{3}R_B = \frac{3}{5}mg$이다. 각 경사면 방향과 P의 연직 방향으로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$\begin{aligned} A: &\quad T - \tfrac{7}{5}mg - \tfrac{8}{5}mg = 5ma, && \text{따라서} T - 3mg = 5ma, \\ B: &\quad T - \tfrac{12}{5}mg - \tfrac{3}{5}mg = 3mb, && \text{따라서} T - 3mg = 3mb, \\ P: &\quad 9mg - 2T = 9mp. \end{aligned}$$

$T = 3mg + X$로 놓자. 그러면 $a = \dfrac{X}{5m}$, $b = \dfrac{X}{3m}$이고, 줄의 조건에서

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{4X}{15m}.$$

이를 P의 방정식에 대입하면

$$3mg - 2X = \frac{12X}{5} \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{15mg}{22}.$$

따라서

$a = \dfrac{3g}{22}$ 경사면 위쪽 방향, $b = \dfrac{5g}{22}$ 경사면 위쪽 방향, $p = \dfrac{2g}{11}$ 연직 아래쪽 방향,

이고, 장력은 $T = \frac{81}{22}mg$이다.

> **생각해 보기** 한 질점이 제자리에 머물지 않고 두 질점이 정말로 모두 위로 움직인다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

위의 방정식에서, 질점이 경사면 위로 미끄러지는 것은 $T > 3mg$일 때뿐이고, 정지해 있는 (또는 아래로 미끄러지려는) 것은 $T \leq 3mg$일 때뿐이다. 값 $3mg$는 두 질점에서 같으므로, 둘 다 위로 움직이거나 둘 다 움직이지 않는다. 만약 둘 다 위로 움직이지 않는다면 $a + b \leq 0$이므로 $p \leq 0$이다. 그런데 $T \leq 3mg$이면 $9mg - 2T \geq 3mg > 0$이므로 $p > 0$이어야 한다. 이는 모순이므로 두 질점은 모두 위로 움직이고, ($a, b > 0$인) 앞의 풀이는 모순이 없다.

검산

▶ 소문항 (i)에서 $\mu = \frac{1}{3}$을 두 질점의 방정식에 대입하면 같은 장력 $3mg$가 나온다.

- 소문항 (ii)에서 줄의 조건대로 $2p = \frac{4g}{11} = \frac{3g}{22} + \frac{5g}{22} = a + b$이고, $T = \frac{81}{22}mg \approx 3.68mg$는 $3mg$(미끄러지기 시작하는 경계값)와 $4.5mg$(P의 가속도가 0이 되는 값) 사이에 있다.
- 세 운동 방정식을 단계별로 계산하는 수치 시뮬레이션에서 줄의 길이는 반올림 오차 범위 안에서 일정하게 유지되고, $p \approx 0.182g$이다.
- M이 다시 $6m$이라면 같은 방법으로 $X = 0$을 얻으므로 모든 가속도가 0이 되어 소문항 (i)과 일치한다.

흔한 실수

- $a = b = p$로 놓는 것: 두 줄 부분이 도르래 P의 운동을 나누어 가지므로, P는 두 질점이 움직이는 속도를 합한 것의 절반으로 움직인다.
- 마찰력을 경사면 위쪽 방향으로 두는 것: 두 질점은 모두 **위로** 끌려가고 있으므로, 마찰력은 이에 저항하여 경사면 아래쪽 방향으로 작용한다.
- P에 걸린 두 줄이 모두 장력 T를 가지므로 P에 작용하는 위쪽 힘이 $2T$라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

관계식 $2p = a + b$는 **구속 조건**(*constraint*)이다. 이 조건은 독립 좌표의 개수를 셋에서 둘로 줄인다. 대학 1학년이나 2학년에서 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 구속 조건을 자동으로 만족하는 좌표를 골라서 장력을 아예 구할 필요가 없게 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 구속 방정식을 통해 꼼꼼하게 다룬 도르래 계가 많이 실려 있어, 그러한 관점으로 넘어가는 좋은 다리가 된다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.