풀이

STEP I 2012, 문제 10

역학 • 자유 낙하와 소리

> **STEP I 2012, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q10

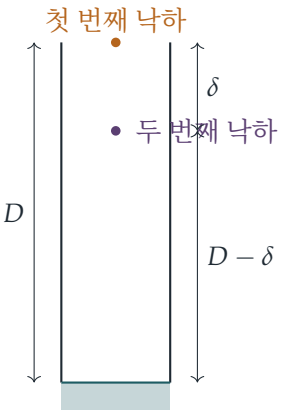
핵심 아이디어

측정한 각 시간은 두 부분으로 이루어진다. 하나는 돌이 정지 상태에서 자유낙하하는 시간이고, 다른 하나는 물에 떨어지는 소리가 일정한 속력으로 다시 올라오는 시간이다. 두 시간을 모두 식으로 쓰고 빼면 곧바로 t를 얻는다. "hence"(이를 이용하여) 부분에서는 두 제곱근이 바로 두 낙하 시간이다. 그 차를 알고 있고 제곱의 차도 간단하므로, 인수분해(factorisation) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$를 이용하면 그 합도 얻게 되고, 따라서 각각의 값도 구할 수 있다.

풀이

t에 대한 식

돌을 중력만 받으며(공기 저항(air resistance)은 무시) 정지 상태에서 떨어지는 질점(particle)으로 모형화하고, 소리는 우물을 따라 일정한 속력 u로 똑바로 올라온다고 가정한다.



정지 상태에서 떨어뜨린 돌은 시간 τ 동안 거리 h를 떨어지며 $h = \frac{1}{2}g\tau^2$이므로 $\tau = \sqrt{2h/g}$이다. 그다음 소리가 같은 거리 h를 거슬러 나에게까지 올라오는 데 h/u가 걸린다. 따라서 수면에서 높이 h인 곳에서 돌을 떨어뜨릴 때 내가 측정하는 시간은

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u}.$$

이다. 꼭대기에서는 $h = D$이다. 아래로 내려간 뒤에는 나(그리고 돌의 출발점)는 수면에서 높이 $D - \delta$인 곳에 있고, 소리는 그곳까지만 오면 된다. 그러므로

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{u}\right) - \left(\sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{D-\delta}{u}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2D}{g}} - \sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{\delta}{u}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

D에 대한 식

두 낙하 시간을 $a = \sqrt{2D/g}$, $b = \sqrt{2(D-\delta)/g}$로 놓자. 방금 보인 결과에 따르면

$$a - b = t - \frac{\delta}{u} = \beta.$$

이다. $\delta > 0$이므로 $a > b$이고, 따라서 $\beta > 0$이다. 특히 $\beta \neq 0$이다. 또한

$$a^2 - b^2 = \frac{2D}{g} - \frac{2(D-\delta)}{g} = \frac{2\delta}{g}.$$

이다.

? **생각해 보기** $a - b$를 알고 있다. a만 따로 구하려면 어떻게 해야 할까?

인수분해하면 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \beta(a+b)$이고, β는 양수이므로 β로 나눌 수 있다. 따라서

$$a + b = \frac{2\delta}{\beta g}.$$

이다. 이것을 $a - b = \beta$와 더하고 2로 나누면

$$a = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\delta}{\beta g} = T.$$

이다. 마지막으로 $a = \sqrt{2D/g}$이면 $D = \frac{1}{2}ga^2$이므로

$$D = \tfrac{1}{2}gT^2,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (즉 T는 돌이 꼭대기에서 우물의 전체 깊이만큼 떨어지는 데 걸리는 시간일 뿐이다.)

수치 계산

$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $t = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$, $\delta = 10\,\mathrm{m}$이면

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{5} - \frac{10}{300} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s},\\
T &= \frac{1}{12} + \frac{10}{\frac{1}{6}\cdot 10} = \frac{1}{12} + 6 = \frac{73}{12}\,\mathrm{s},\\
D &= \tfrac{1}{2}\cdot 10 \cdot \left(\frac{73}{12}\right)^2 = \frac{5\times 5329}{144} = \frac{26645}{144} \approx 185.03\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

이다. 따라서 우물의 깊이는 약 185 m이다.

검산

- $D = 26645/144$를 $\delta = 10$과 함께 t에 대한 식에 다시 대입하자. 두 낙하 시간은 $73/12 \approx 6.083\,\mathrm{s}$와 $\sqrt{2(175.03)/10} \approx 5.917\,\mathrm{s}$로, 그 차는 $1/6\,\mathrm{s}$이다. 여기에 $\delta/u = 1/30\,\mathrm{s}$를 더하면 정확히 $t = 0.2\,\mathrm{s}$가 된다.
- 소리가 순간적으로 전달된다면($u \to \infty$) $\beta = t$가 되는데, 당연히 그래야 한다. 이때는 낙하 시간만 의미가 있기 때문이다.
- 떨어지는 돌을 작은 시간 간격으로 수치 계산하고 소리의 지연을 더하면 t에 대한 식이 $10^{-4}\,\mathrm{s}$ 이내로 재현되며, 역으로 구한 식 $D = \frac{1}{2}gT^2$는 무작위로 고른 10^4가지 경우에서 D를 정확히 되찾는다.

흔한 실수

- 내가 아래로 내려간 뒤에는 소리가 $D - \delta$만 이동한다는 사실을 잊어서 δ/u 항을 빠뜨리는 것.
- 방정식 $a - b = \beta$를 곧바로 제곱하려는 것. 이렇게 하면 계산이 지저분해지지만, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$를 쓰면 한 줄 만에 $a+b$를 얻는다.
- 소리를 아예 무시하는 것. $\beta = t = 0.2$로 놓고 같은 방법을 쓰면 $T = 5.1\,\text{s}$, $D \approx 130\,\text{m}$가 되어 크게 틀린다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 **차분 측정**(*differential measurement*)이다. 한 번의 시간 측정을 그대로 믿는 대신, 알려진 양만큼 차이가 나는 두 실험을 비교하여 미지의 양이 상쇄되도록 하는 것이다. 마지막 실수는 자료의 작은 변화에 답이 얼마나 민감한지를 보여 준다. t는 큰 두 시간의 작은 차이기 때문이다. 물리학자와 공학자는 이를 오차 전파(error propagation)와 조건수(condition number)로 정량화하며, 이는 대학 1학년의 실험 방법론과 수치해석(numerical analysis)에서 배운다. 간단한 운동을 신중하게 모형화하는 방법에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.