풀이

STEP I 2012, 문제 1

순수수학 • 미적분을 이용한 최적화

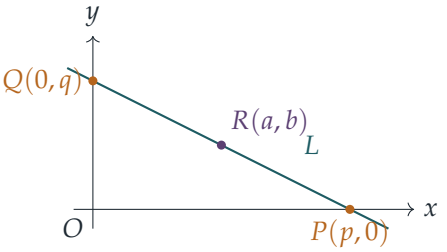
> **STEP I 2012, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q1

핵심 아이디어

모든 것은 단 하나의 수, 곧 기울기(gradient)가 결정한다. L이 R를 지나도록 고정하면 절편(intercept) p와 q는 m의 간단한 함수가 되고, 최소화해야 할 두 거리는 모두 오직 m만의 함수가 된다. 합 $p+q$는 상수와 $am+b/m$ 꼴의 항으로 나뉘는데, 이는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)(또는 한 번의 미분)으로 처리하는 교과서적인 문제이다. 길이 PQ에 대해서는 $q=mp$임을 알아차리는 것이 유리하다. 그러면 미분하기 전에 PQ^2가 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

p와 q 구하기



$R(a,b)$가 $y=c-mx$ 위에 있으므로 $b=c-ma$이고, 따라서 $c=b+ma$이다. 직선은 $x=0$인 곳에서 y축과 만나므로 $q=c$이고, $y=0$인 곳에서 x축과 만나므로 $p=c/m$이다($m>0$이므로 나눌 수 있다). 그러므로

$$p=a+\frac{b}{m}, \qquad q=b+ma.$$

요구된 대로 모든 $m > 0$에 대해 두 값은 모두 양수이다. 또한

$$q = b + ma = m\left(a + \frac{b}{m}\right) = mp,$$

임에 주목하자. 이는 L의 기울기가 $-q/p$라는 사실을 다르게 표현한 것일 뿐이다. 이 사실을 아래에서 사용한다.

$OP + OQ$의 최소화

$p, q > 0$이므로 O로부터 P와 Q까지의 거리는 각각 p와 q 자신이다. 따라서 R를 고정하고 m을 $m > 0$ 범위에서 변화시킬 때 최소화해야 할 것은

$$S(m) = p + q = a + b + \left(am + \frac{b}{m}\right).$$

이다. 괄호 안은 두 양수의 합이고, 그 곱 ab는 m에 의존하지 않는다. 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$am + \frac{b}{m} \geq 2\sqrt{am \cdot \frac{b}{m}} = 2\sqrt{ab},$$

이고, 등호는 정확히 $am = b/m$일 때, 곧 $m = \sqrt{b/a}$일 때 성립한다(이 값은 양수이므로 이 직선은 허용된다). 그러므로

$$S(m) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2,$$

이고 이 하한은 실제로 도달된다. 따라서 요구된 대로 두 거리의 합의 최솟값은 $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2$이다.

(미적분을 선호한다면: $S'(m) = a - b/m^2$이고, 이는 $m = \sqrt{b/a}$에서만 0이 되며, 대입하면 같은 값을 얻는다.)

PQ의 최소화

피타고라스(Pythagoras) 정리와 $q = mp$를 이용하면

$$PQ^2 = p^2 + q^2 = p^2(1 + m^2) = \left(a + \frac{b}{m}\right)^2(1 + m^2).$$

$PQ > 0$이므로 PQ를 최소화하는 것은 $f(m) = PQ^2$을 최소화하는 것과 같다. 곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)으로 미분하면

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(-\frac{b}{m^2}\right)(1 + m^2) + 2m\left(a + \frac{b}{m}\right)^2 \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left[-\frac{b}{m^2} - b + am + b\right] \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(am - \frac{b}{m^2}\right). \end{aligned}$$

? 생각해 보기 $-b$는 어디에서 소거되는가?

대괄호 안에서 $-\frac{b}{m^2}(1+m^2) = -\frac{b}{m^2} - b$이고, $m(a+\frac{b}{m}) = am + b$이므로 두 b가 소거된다. 바로 이 소거 때문에 p^2+q^2를 직접 전개하지 않고 PQ^2을 $p^2(1+m^2)$으로 쓴 것이다.

첫째 인수는 양수이므로 $f'(m) = 0$이 되는 것은 정확히 $am = b/m^2$, 곧 $m^3 = b/a$일 때이며, 따라서 유일한 정류점(stationary point)은

$$m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

이다. (문제에서 이것이 최솟값이라고 가정해도 된다고 했지만, 실제로 이보다 작은 m에서는 $f' < 0$이고 큰 m에서는 $f' > 0$이므로, 이는 $m > 0$에서의 전역 최솟값(global minimum)이다.)

이제 대입한다. 이 m에 대하여

$$a + \frac{b}{m} = a + b \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}), \qquad 1 + m^2 = 1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

그러므로

$$PQ^2 = a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^2 \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^3,$$

이고, 따라서 P와 Q 사이의 최소 거리는

$$PQ_{\min} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

이다. 이것이 문제에서 요구한 "비슷한 꼴"이다. 첫째 답은 안쪽 지수가 $\frac{1}{2}$, 바깥 지수가 2이고, 이 답은 안쪽 지수가 $\frac{2}{3}$, 바깥 지수가 $\frac{3}{2}$이다.

검산

- 대칭성(symmetry): a와 b를 맞바꾸어도($y = x$에 대한 대칭이동) 두 최솟값은 변하지 않아야 하며, 실제로 그렇다.
- 수치 예: $a = 1, b = 8$로 두자. 둘째 결과에 따르면 $m = 2$이고, 이때 $p = 5, q = 10$, $PQ = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11.180$이며, 실제로 $(1+4)^{3/2} = 5\sqrt{5}$이다. 합의 경우 $m = \sqrt{8}$이면 $p + q = 9 + 4\sqrt{2} \approx 14.657 = (1+2\sqrt{2})^2$이다.
- 무작위로 고른 2000개의 쌍 (a, b)에 대해 m에 관한 전수 탐색과 두 최솟값을 비교해 보았고, 약 10^{-8} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- p^2+q^2를 모두 전개한 뒤 미분하는 것: 틀리지는 않지만 복잡하고, 인수 $am-b/m^2$을 놓치기 쉽다. 먼저 $q=mp$를 알아차리면 많은 수고를 덜 수 있다.
- PQ의 최소화와 PQ^2의 최소화가 동치인 것은 오직 $PQ>0$이기 때문이라는 점을 잊는 것, 그리고 $a+b/m$을 간단히 할 때 분수 지수를 놓치는 것.

STEP 너머

둘째 결과는 고전적인 "모퉁이를 도는 사다리" 문제가 모습을 바꾼 것이다. $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$는 폭이 a와 b인 두 복도가 만나는 모퉁이를 수평으로 들고 돌아갈 수 있는 가장 긴 사다리의 길이이다. 길이가 일정한 선분 PQ들의 모임은 아스테로이드(astroid) $x^{2/3}+y^{2/3}=\ell^{2/3}$을 포락선(envelope)으로 가지며, R가 이 포락선 위에 놓이는 것은 정확히 ℓ이 이 최솟값일 때이다. 포락선과 제약 조건이 있는 최적화(constrained optimisation)(나중에는 라그랑주 승수(Lagrange multipliers))는 대학 1학년 미적분학 강좌에서 등장한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 취지의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.