풀이

STEP III 2011, 문제 9

역학 • 원기둥 위의 운동

STEP III 2011, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

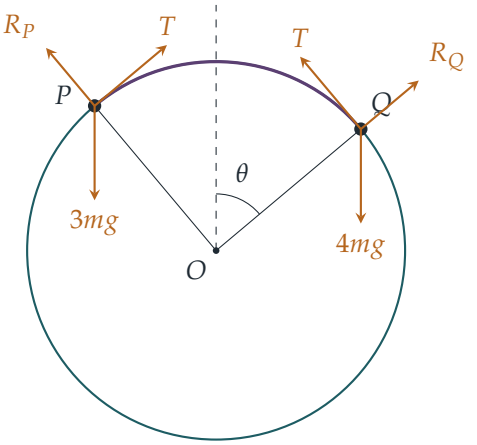
step.maths.org/questions/11-s3-q9

핵심 아이디어

원기둥 위에 놓인 길이 $\frac{1}{2}\pi a$의 줄은 O에서 직각을 이루므로, OP와 OQ는 항상 서로 수직이고 계 전체는 단 하나의 좌표 θ로 기술된다. 그러면 에너지 보존(energy conservation)으로부터 $\dot{\theta}^2$를 바로 얻고, 중심 방향으로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면 각 수직항력(normal reaction)을 $\dot{\theta}^2$로 나타낼 수 있다. 접촉을 잃는다는 것은 수직항력이 0이 된다는 뜻이다. 장력(tension)을 구할 때는 접선 방향(tangential)의 운동방정식을 쓴다. 두 식을 더하면 T가 소거되어 $\ddot{\theta}$를 얻고, 그다음 어느 한 식만 써도 T를 구할 수 있다.

풀이

모형. P와 Q는 입자이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며, 원기둥은 매끄럽다. 매끄러운 면 위를 지나는 가벼운 줄의 장력은 어디서나 같은 값 T이다. 두 입자 사이의 호의 길이는 $\frac{1}{2}\pi a$이므로 $\angle POQ = \frac{1}{2}\pi$이다. θ를 OQ가 위쪽 연직선과 이루는 각으로 잡고, Q는 꼭대기의 한쪽에 있다고 하자. 그러면 OP는 반대쪽에서 위쪽 연직선과 각 $\frac{1}{2}\pi - \theta$를 이룬다. 두 입자가 면 위에 있는 동안에는 둘 다 반지름 a인 원 위를 각속도(angular speed) $\dot{\theta}$로 움직이므로, 각각의 속력은 $a\dot{\theta}$이다.



평형. 각 입자에서 면을 따라 힘을 분해하면(수직항력은 접선 성분이 없고, 줄은 꼭대기 쪽으로 접선 방향으로 당긴다), Q에 대해서는 $T = 4mg\sin\theta$, P에 대해서는 $T = 3mg\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = 3mg\cos\theta$를 얻는다. 따라서 처음에는 $\tan\theta = \frac{3}{4}$, 즉 $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$이다.

에너지. O의 높이를 위치 에너지(potential energy)의 기준(0)으로 잡자. Q의 높이는 $a\cos\theta$이고 P의 높이는 $a\cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = a\sin\theta$이다. 수직항력은 일을 하지 않고(운동 방향에 수직이므로), 장력은 계 전체에 대해 알짜 일을 하지 않으므로(줄이 늘어나지 않으므로) 에너지가 보존된다. 교란이 아주 작으므로 계는 정지 상태에서 출발한다. 따라서

$$\tfrac{1}{2}(3m + 4m)a^2\dot{\theta}^2 + 4mga\cos\theta + 3mga\sin\theta = 4mga\cdot\tfrac{4}{5} + 3mga\cdot\tfrac{3}{5} = 5mga.$$

양변에 $2/(ma)$를 곱하면

$$7a\dot{\theta}^2 + 8g\cos\theta + 6g\sin\theta = 10g,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. Q가 아래로 움직이면서 θ는 $\tan^{-1}\frac{3}{4}$에서부터 증가한다.

소문항 (i)

Q는 반지름 a인 원 위를 속력 $a\dot{\theta}$로 움직이므로, O를 향하는 가속도 $a\dot{\theta}^2$를 가진다. 무게의 O 방향 성분은 $4mg\cos\theta$이고, R_Q는 바깥쪽으로 작용한다. 줄은 접선 방향이므로 지름 방향으로는 아무 기여도 하지 않는다. 따라서

$$4mg\cos\theta - R_Q = 4ma\dot{\theta}^2, \qquad \text{따라서} \qquad R_Q = 4mg\cos\theta - 4ma\dot{\theta}^2.$$

Q는 R_Q가 0이 될 때, 즉 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$일 때 면에서 떨어진다. 이를 $\theta = \beta$에서의 에너지 방정식에 대입하면

$$7g\cos\beta + 8g\cos\beta + 6g\sin\beta = 10g \quad\Longrightarrow\quad 15\cos\beta + 6\sin\beta = 10,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

생각해 보기 에너지 방정식이 $\theta = \beta$에 이를 때까지 계속 성립하는 이유는 무엇인가?

에너지 방정식은 두 입자가 모두 원기둥 위에 있는 동안 성립하며, 문제에서 Q가 먼저 떨어진다고 알려 준다. 이는 직접 확인할 수도 있다. P에 대해 같은 논증을 하면 $R_P = 3mg\sin\theta - 3ma\dot{\theta}^2$이고, 이는 $13\sin\theta + 8\cos\theta = 10$일 때 0이 된다. $\beta \approx 73.6°$에서 좌변은 약 14.7이므로 R_P는 여전히 양수이다.

소문항 (ii)

이제 운동 방향을 양의 방향으로 잡고 접선 방향으로 힘을 분해한다. Q는 접선 가속도 $a\ddot{\theta}$로 꼭대기에서 멀어지고, P는 같은 접선 가속도 $a\ddot{\theta}$로 꼭대기를 향해 움직인다(줄 때문에 두 입자의 속력이 같게 유지된다). Q에 대해서는 중력의 성분 $4mg\sin\theta$가 앞쪽으로 작용하고 장력은 뒤로 당긴다.

$$4ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - T. \tag{1}$$

P에 대해서는 장력이 앞으로 당기고 중력의 성분 $3mg\cos\theta$가 뒤쪽으로 작용한다.

$$3ma\ddot{\theta} = T - 3mg\cos\theta. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하면 T가 소거된다.

$$7ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - 3mg\cos\theta.$$

(이는 에너지 방정식을 시간에 대해 미분(differentiation)한 뒤 $2\dot{\theta}$로 나눈 결과와 일치한다.) 이를 (1)에 대입하면

$$\begin{aligned} T &= 4mg\sin\theta - 4ma\ddot{\theta} \\ &= 4mg\sin\theta - \tfrac{4}{7}m(4g\sin\theta - 3g\cos\theta) \\ &= \tfrac{12}{7}mg\sin\theta + \tfrac{12}{7}mg\cos\theta = \tfrac{12}{7}mg(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 이 값은 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이므로, 줄은 운동하는 내내 팽팽하게 유지된다.

검산

- 평형 상태에서 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$이므로 $T = \frac{12}{5}mg$이다. 이는 $4mg\cdot\frac{3}{5}$ 및 $3mg\cdot\frac{4}{5}$와 일치한다.
- $\tan\alpha = \frac{2}{5}$로 두고 $15\cos\beta + 6\sin\beta = \sqrt{261}\cos(\beta - \alpha)$로 쓰면 $\beta \approx 1.2839$ rad $\approx 73.56°$를 얻는다. 평형을 막 벗어난 지점에서부터 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았더니, R_Q는 바로 이 각에서 처음으로 0이 되었고 R_P는 양수로 유지되었다. 에너지 관계식과 장력 공식은 전체 경로에서 반올림 오차 범위 안에서 성립했다.

흔한 실수

- P의 높이를 $a\sin\theta$가 아니라 $a\cos\theta$로 잡는 실수. 줄의 길이가 주어진 핵심 이유가 바로 직각 $\angle POQ$이다.
- 두 입자에 서로 다른 장력을 주거나, 지름 방향 방정식에 T를 넣는 실수. 줄은 입자에 접선 방향으로 닿아 있으므로 T는 접선 방향 방정식에만 나타난다.

STEP 너머

좌표 하나 θ로 모든 것이 기술되므로, 이 계는 자유도(degree of freedom)가 1인 계이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 운동 에너지(kinetic energy)와 위치 에너지로부터 운동방정식을 곧바로 얻으며, 구속력(forces of constraint)은 전혀 필요하지 않다. 그러면 수직항력과 장력은 구속 조건에 대한 "라그랑주 승수(Lagrange multipliers)"로 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 라그랑주 역학을 만나기 전에 구속 운동과 에너지 방법에 대한 감각을 깊게 다지기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.