풀이

STEP III 2011, 문제 8

순수수학 • 복소평면 위의 자취

STEP III 2011, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q8

핵심 아이디어

분모의 켤레(conjugate)를 분자와 분모에 곱하여 u와 v를 구한다. 그다음부터 각 소문항은 주어진 직선을 대입하고 익숙한 곡선을 알아보는 문제가 된다. 반각 치환(half-angle substitution)은 $\frac{2x}{1+x^2}$와 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$을 사인과 코사인으로 바꾸어 주며, 문제가 이 치환을 제안하는 이유가 바로 이것이다. 풀이 내내 곡선의 어느 점에 실제로 도달하는지 주의 깊게 살펴야 한다. 끝점과 빠진 점이 답의 절반이다.

풀이

$z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 그러면 $1 + \mathrm{i}z = (1-y) + \mathrm{i}x$이고 $\mathrm{i} + z = x + \mathrm{i}(1+y)$이므로, 분자와 분모에 $x - \mathrm{i}(1+y)$를 곱하면

$$\begin{aligned} w &= \frac{((1-y)+\mathrm{i}x)(x-\mathrm{i}(1+y))}{x^2+(1+y)^2} \\ &= \frac{(1-y)x + x(1+y) + \mathrm{i}(x^2-(1-y)(1+y))}{x^2+(1+y)^2}. \end{aligned}$$

따라서

$$u = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}, \qquad v = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(1+y)^2},$$

이며, 이는 $z \neq -\mathrm{i}$일 때 성립한다(w가 정의되지 않는 점).

역사상(inverse map)을 구해 두는 것도 도움이 된다. $w(\mathrm{i}+z) = 1 + \mathrm{i}z$로부터 $z(w-\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}w$를 얻으므로

$$z = \frac{1-\mathrm{i}w}{w-\mathrm{i}}, \qquad w \neq \mathrm{i}.$$

따라서 모든 $w \neq \mathrm{i}$는 정확히 하나의 z로부터 오며, $w = \mathrm{i}$는 결코 얻어지지 않는다. 이것이 앞으로 계속 만나게 될 빠진 점이다.

소문항 (i)

$y = 0$이면

$$u = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad v = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$x = \tan(\theta/2)$로 놓자. x가 모든 실수를 움직일 때 θ는 $-\pi < \theta < \pi$ 범위를 움직이며, 각 x는 이러한 θ를 정확히 하나 준다. 반각 공식에 의해

$$u = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \sin\theta, \qquad v = -\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = -\cos\theta.$$

따라서 $u^2+v^2 = 1$이다. 더욱이 $(\sin\theta, -\cos\theta)$는 $-\pi < \theta < \pi$에서 $\theta = \pm\pi$에 해당하는 점, 즉 $(u,v) = (0,1)$을 제외한 단위원 전체를 그린다. 따라서 w의 자취(locus)는 원 $u^2+v^2 = 1$에서 한 점 $w = \mathrm{i}$를 뺀 것이며, 이것이 보여야 할 것이었다. (빠진 점은 $x \to \pm\infty$일 때 w의 극한이다.)

소문항 (ii)

이제 $-1 < x < 1$이고, 이는 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$에 해당한다. 이 범위에서 $v = -\cos\theta < 0$이고, $u = \sin\theta$는 -1에서 1까지 증가한다(양 끝값은 포함하지 않는다). 따라서 w의 자취는

$$u^2+v^2 = 1, \quad v < 0,$$

즉 단위원의 아래쪽 절반이며, 끝점 $w = \pm 1$은 **포함하지 않는다**(이 끝점은 $x = \pm 1$에서 나온다).

소문항 (iii)

$x = 0$이면 $u = 0$이고

$$v = \frac{y^2-1}{(1+y)^2} = \frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)^2} = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1},$$

이다. 여기서 $y > -1$이므로 $y+1$을 약분해도 된다.

? **생각해 보기** v의 모든 음수 값에 도달하는가, 아니면 그중 일부에만 도달하는가?

y가 -1에서 1까지 증가하면 $y+1$은 $(0,2)$ 위에서 증가하므로 $\frac{2}{y+1}$은 $(1,\infty)$ 위에서 감소하고, v는 $(-\infty, 0)$ 위에서 연속적으로, 그리고 순증가(strictly increasing)하며 움직인다. $y \to -1^+$일 때 $v \to -\infty$이고, $y \to 1^-$일 때 $v \to 0^-$이다. 따라서 모든 음수 v에 정확히 한

번씩 도달한다. w의 자취는 음의 허수축

$$u = 0, \quad v < 0,$$

이며, 원점은 제외된다(원점은 $y = 1$에서 나온다).

소문항 (iv)

$y = 1$이면

$$u = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad v = \frac{x^2}{x^2+4}.$$

그러면

$$u^2 + v^2 = \frac{4x^2 + x^4}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+4} = v,$$

이므로 w는 $u^2 + v^2 = v$ 위에 있다. 즉

$$u^2 + (v - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4},$$

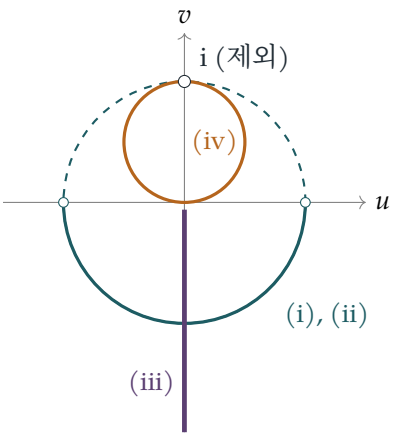
이며, 이것은 중심이 $\frac{1}{2}$i이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원이다.

? **생각해 보기** 이 원의 어느 점에 실제로 도달하는가?

$v = 1 - \frac{4}{x^2+4}$이므로 $0 \le v < 1$이고, 따라서 맨 위의 점 $w = \mathrm{i}$에는 결코 도달하지 않는다. 그 밖의 모든 점에는 도달한다. $x = 2\tan(\phi/2)$, $-\pi < \phi < \pi$로 놓으면

$$u = \frac{\tan(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}\sin\phi, \qquad v = \frac{\tan^2(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\phi),$$

이고, 이는 $\phi = \pm\pi$, 즉 점 $(0,1)$을 제외하고 원 전체를 한 바퀴 돈다. (또는 역사상을 이용하면 각 $w \neq \mathrm{i}$가 정확히 하나의 z에서 온다는 것을 알 수 있다.) 따라서 자취는 원 $u^2 + v^2 = v$에서 점 $w = \mathrm{i}$를 뺀 것이다. 이 원은 $z = \mathrm{i}$의 상(image)인 $w = 0$에서 실수축에 접한다.



점선과 실선으로 그린 청록색 원은 실수축의 상으로 소문항 (i)에 해당하고, 실선으로 그린 아래쪽 절반은 소문항 (ii)에 해당한다. 자주색 반직선은 소문항 (iii), 호박색 원은 소문항 (iv)에 해당한다.

검산

- $z = 0$이면 $w = 1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$이다. 이 점은 아래쪽 반원 (ii)와 반직선 (iii) 위에 있으며, 실제로 $z = 0$은 두 선분 모두에 놓인다.
- $z = 1 + \mathrm{i}$이면 $w = \frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$이고 $0.4^2 + 0.2^2 = 0.2 = v$이므로, 이 점은 (iv)의 원 위에 있다.
- 큰 실수 z: $w(10^8) \approx 2 \times 10^{-8} + \mathrm{i}$로, 빠진 점 i에 가까워진다.
- 또한 수천 개의 무작위 점에 대하여 u, v에 대한 공식과, 주장한 각 자취의 모든 점이 해당 직선 또는 선분 위에 원상(preimage)을 갖는다는 것을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 원이나 반원만 제시하고 어느 점이 빠지거나 제외되는지 밝히지 않는 것. 여기서는 (i)과 (iv)의 $w = \mathrm{i}$, 그리고 (ii)의 끝점 ± 1이 그렇다.
- (iii)의 자취가 허수축 전체라고 주장하는 것. 모든 $-1 < y < 1$에 대하여 $v = \frac{y-1}{y+1}$은 음수이다.

STEP 너머

이 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. 실제로 $w = \mathrm{i}\,\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$이므로 $|w| = |z - \mathrm{i}|/|z + \mathrm{i}|$이고, 이 값은 z가 $\pm\mathrm{i}$에서 같은 거리에 있을 때, 즉 실수일 때 정확히 1이다. 뫼비우스 사상은 직선과 원을 직선과 원으로 보내며(직선은 "∞를 지나는 원"으로 본다), 빠진 점 i는 ∞의 상이다. 이 사상(케일리 변환(Cayley transform))은 상반평면(upper half-plane)을 단위 원판(unit disc) 위로 보내며, 복소해석학(complex analysis)과 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 핵심 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 뫼비우스 변환을 그림 중심으로 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.