풀이

STEP III 2011, 문제 7

순수수학 • 수학적 귀납법

> **STEP III 2011, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q7

핵심 아이디어

$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$를 제곱하면 따로 떨어진 제곱근이 사라지고 $p+q\sqrt{a(a+1)}$ 꼴의 수가 남는다. 따라서 n이 짝수일 때는 T_2를 곱하여 T_n에서 T_{n+2}로 넘어갈 수 있다. 이때 $A^2-a(a+1)B^2$라는 양이 이 곱셈으로 변하지 않는다는 사실이 드러나는데, 이것이 바로 귀납법(induction)에 필요한 것이다. $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$를 한 번 더 곱하면 n이 홀수인 경우가 해결되고, (i)과 (ii)의 항등식은 두 항이 연속한 정수의 제곱근임을 말해 준다.

풀이

처음부터 끝까지 $N=a(a+1)$로 두면 $\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}=\sqrt{N}$이다.

소문항 (i)

기저 단계(*base case*), $n=2$. 전개하면

$$T_2=(a+1)+2\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}+a=(2a+1)+2\sqrt{N},$$

이므로 $A_2=2a+1$과 $B_2=2$는 정수이고

$$A_2^2-NB_2^2=4a^2+4a+1-4a(a+1)=1.$$

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 짝수 $n\geq 2$에 대하여 $A_n^2-NB_n^2=1$을 만족하는 정수 A_n, B_n으로 $T_n=A_n+B_n\sqrt{N}$이라 하자. 간단히 $p=2a+1$로 쓰고, $p^2=4a^2+4a+1=$

$4N+1$임에 주목한다. $T_{n+2} = T_n T_2$이므로

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= (A_n + B_n\sqrt{N})(p + 2\sqrt{N}) \\ &= (pA_n + 2NB_n) + (2A_n + pB_n)\sqrt{N}. \end{aligned}$$

따라서

$$A_{n+2} = pA_n + 2NB_n, \qquad B_{n+2} = 2A_n + pB_n,$$

로 잡을 수 있고, p, N, A_n, B_n이 정수이므로 이들도 정수이다. 항등식을 보면 교차항 $\pm 4pNA_nB_n$이 소거된다.

$$\begin{aligned} A_{n+2}^2 - NB_{n+2}^2 &= (p^2A_n^2 + 4pNA_nB_n + 4N^2B_n^2) - N(4A_n^2 + 4pA_nB_n + p^2B_n^2) \\ &= (p^2 - 4N)A_n^2 - N(p^2 - 4N)B_n^2 \\ &= A_n^2 - NB_n^2 = 1, \end{aligned}$$

여기서 $p^2 - 4N = 1$을 쓴 다음 귀납 가정(inductive hypothesis)을 사용하였다. 따라서 명제는 $n+2$에 대해서도 성립하고, 귀납법에 의해 모든 짝수인 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

또한 $A_2, B_2 > 0$이고 점화식(recurrence)의 계수가 모두 양수이므로, 모든 짝수 n에 대하여 $A_n > 0$이고 $B_n > 0$이다. 이 사실은 소문항 (iii)에서 필요하다.

? **생각해 보기** 왜 $A^2 - NB^2$는 T_2를 곱해도 그대로 남는가?

$A^2 - NB^2 = (A + B\sqrt{N})(A - B\sqrt{N})$이고, 같은 계산으로 "켤레(conjugate)" $A - B\sqrt{N}$에는 매 단계마다 $p - 2\sqrt{N}$이 곱해짐을 알 수 있기 때문이다. 따라서 그 곱에는 $(p+2\sqrt{N})(p-2\sqrt{N}) = p^2 - 4N = 1$이 곱해진다. 위의 대수 계산은 이 사실을 풀어 쓴 것에 불과하다.

소문항 (ii)

$n = 1$인 경우. $T_1 = 1 \cdot \sqrt{a+1} + 1 \cdot \sqrt{a}$이므로 $C_1 = D_1 = 1$이고, $(a+1)C_1^2 = a + 1 = aD_1^2 + 1$이다.

$n \geq 3$이 홀수인 경우. 이때 $m = n - 1$은 짝수인 양수이므로, 소문항 (i)에 의해 $A_m^2 - NB_m^2 = 1$인 $T_m = A_m + B_m\sqrt{N}$이 성립한다. $\sqrt{N}\sqrt{a+1} = (a+1)\sqrt{a}$와 $\sqrt{N}\sqrt{a} = a\sqrt{a+1}$을 이용하면

$$\begin{aligned} T_n = (\sqrt{a+1} + \sqrt{a})(A_m + B_m\sqrt{N}) &= A_m\sqrt{a+1} + A_m\sqrt{a} + (a+1)B_m\sqrt{a} + aB_m\sqrt{a+1} \\ &= (A_m + aB_m)\sqrt{a+1} + (A_m + (a+1)B_m)\sqrt{a}. \end{aligned}$$

따라서 $C_n = A_m + aB_m$과 $D_n = A_m + (a+1)B_m$은 정수이다(그리고 양수이다). 이제

$$\begin{aligned}(a+1)C_n^2 - aD_n^2 &= (a+1)(A_m^2 + 2aA_mB_m + a^2B_m^2) \\ &\quad - a(A_m^2 + 2(a+1)A_mB_m + (a+1)^2B_m^2) \\ &= A_m^2 + a(a+1)[a-(a+1)]B_m^2 \\ &= A_m^2 - NB_m^2 = 1,\end{aligned}$$

이는 A_mB_m 항들이 소거되기 때문이다. 그러므로 요구한 대로 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$이다. ($n = 1$인 경우도 사실은 $T_0 = 1$, 즉 $A_0 = 1$, $B_0 = 0$으로 놓은 같은 계산이다.)

소문항 (iii)

n이 짝수인 경우. $A_n > 0$이고 $B_n > 0$이므로

$$T_n = A_n + B_n\sqrt{N} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{NB_n^2},$$

이고, 소문항 (i)에 의해 정수 NB_n^2과 $A_n^2 = NB_n^2 + 1$은 연속한 정수이다.

> ? **생각해 보기** 왜 A_n과 B_n의 부호가 필요한가?

$\sqrt{A^2} = |A|$이지 A가 아니기 때문이다. $A_n = \sqrt{A_n^2}$이라고 쓰는 것은 $A_n \geq 0$임을 알 때에만 타당하며, 그래서 소문항 (i)에서 양수임을 기록해 둔 것이다.

n이 홀수인 경우. $C_n, D_n > 0$이므로

$$T_n = C_n\sqrt{a+1} + D_n\sqrt{a} = \sqrt{(a+1)C_n^2} + \sqrt{aD_n^2},$$

이고, 소문항 (ii)에 의해 정수 aD_n^2과 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$은 연속한 정수이다.

따라서 모든 양의 정수 n에 대하여, 어떤 양의 정수 k가 있어 $T_n = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$이다. 즉 n이 짝수이면 $k = a(a+1)B_n^2$, n이 홀수이면 $k = aD_n^2$이다.

검산

$a = 3$으로 두면 $T_n = (2+\sqrt{3})^n$이다. 그러면 $T_2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{12} = \sqrt{49} + \sqrt{48}$이고, $49 = 12 \cdot 4 + 1$이다. 다음으로 $A_2 = 7$, $B_2 = 2$로부터 $C_3 = 13$, $D_3 = 15$를 얻고, $T_3 = 26 + 15\sqrt{3} = \sqrt{676} + \sqrt{675} \approx 51.9808$이며, 이는 $(2+\sqrt{3})^3$을 직접 계산한 값과 일치한다. 컴퓨터로 $1 \leq a \leq 39$, $n \leq 23$에 대해 점화식을 돌려, 두 항등식이 정수 연산에서 정확히 성립함과 T_n의 전개가 수치적으로 맞음을 확인하였다.

흔한 실수

- 기저 단계를 빠뜨리거나, 소문항 (i)은 짝수 n에 관한 것인데 귀납법을 $n = 1$에서 시작하는 것.
- 소문항 (iii)에서 A_n(그리고 B_n, C_n, D_n)이 양수임을 언급하지 않고 $A_n = \sqrt{A_n^2}$이라고 쓰는 것.

STEP 너머

방정식 $x^2 - Ny^2 = 1$은 펠 방정식(Pell's equation)이며, 소문항 (i)은 $(2a+1) + 2\sqrt{a(a+1)}$의 거듭제곱이 $N = a(a+1)$에 대한 해를 무수히 많이 만들어 냄을 보여 준다. 핵심은 $x + y\sqrt{N}$의 "노름(norm)" $x^2 - Ny^2$이 곱셈적이라는 사실인데, 이것이 이차 수체(quadratic number field)와 그 단원(unit)에 관한 이론의 출발점이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*에는 펠 방정식과 연분수(continued fraction)에 대한 매우 읽기 쉬운 설명이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.