풀이

STEP III 2011, 문제 6

순수수학 • 적분에서의 치환

STEP III 2011, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q6

핵심 아이디어

어떤 값도 직접 계산해서는 안 되므로, 쓸 수 있는 도구는 한 적분을 다른 적분으로 바꾸어 주는 것들, 곧 치환적분(substitution)과 부분적분(integration by parts)뿐이다. 실마리는 적분 구간에 있다. 수 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$와 $\ln 2, \ln 3$은 $v = e^{-u}$로 연결되고, $\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\ln 3$은 $t = e^{-2x}$에 의해 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$과 연결된다. 적분 T와 V는 적분 구간이 같고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2}$이라는 사실은 둘 사이에 부분적분을 써 보라고 암시한다. 이 세 가지 연결만으로 네 적분이 모두 같음을 보일 수 있다.



풀이

풀이 전체에서 다음을 사용한다.

$$\operatorname{artanh} t = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad (|t|<1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2},$$

특히 $\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3$이고 $\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 2$이다. 모든 피적분함수(integrand)는 각자의 (닫혀 있고 유계인) 구간에서 연속이므로, 모든 적분이 존재하고 아래의 계산은 모두 정당하다.

$T = V$: 부분적분

T에서 $\frac{1}{t}$은 적분하고 $\operatorname{artanh} t$는 미분한다. 즉 $u = \operatorname{artanh} t$, $\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{t}$로 두면 $w = \ln t$이다(구간에서 $t > 0$이므로 문제없다).

$$\begin{aligned} T &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} + V, \end{aligned}$$

남은 적분이 바로 V이기 때문이다(적분변수의 이름은 상관없다).

> **생각해 보기** 경계항 때문에 등식이 깨지지 않을까?

경계항은 0이 되며, 이것이 이 문제의 묘미이다. 위끝에서는 $\ln\frac{1}{2}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = (-\ln 2)(\frac{1}{2}\ln 3)$이고, 아래끝에서는 $\ln\frac{1}{3}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = (-\ln 3)(\frac{1}{2}\ln 2)$이다. 둘 다 $-\frac{1}{2}\ln 2\ln 3$이므로

$$\Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 + \tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 = 0,$$

이고, 따라서 $T = V$이다.

$V = U$: 치환 $v = e^{-u}$

$v = e^{-u}$로 두면 $\ln v = -u$이고 $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$이다. $v = \frac{1}{3}$일 때 $u = \ln 3$이고, $v = \frac{1}{2}$일 때 $u = \ln 2$이다. 그러면

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{-u}{1-e^{-2u}}\,(-e^{-u})\,\mathrm{d}u = -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꿈)} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{e^{u}-e^{-u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(분자와 분모에 } e^{u}\text{를 곱함)} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{2\sinh u}\,\mathrm{d}u = U. \end{aligned}$$

$X = T$: 치환 $t = e^{-2x}$

먼저 X의 피적분함수를 다시 쓴다. $x > 0$일 때

$$\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}, \qquad \text{이므로} \qquad \ln(\coth x) = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\operatorname{artanh}\big(e^{-2x}\big),$$

이고, $0 < e^{-2x} < 1$이므로 이 식은 성립한다. 이제 $t = e^{-2x}$로 두면 $\mathrm{d}t = -2t\,\mathrm{d}x$, 즉 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$이다. $x = \frac{1}{2}\ln 2$일 때 $t = \frac{1}{2}$이고, $x = \frac{1}{2}\ln 3$일 때 $t = \frac{1}{3}$이다. 따라서

$$X = \int_{1/2}^{1/3} 2\operatorname{artanh} t\left(-\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\operatorname{artanh} t}{t}\,\mathrm{d}t = T.$$

결론

세 가지 연결을 합치면 $X = T = V = U$이므로, 요구한 대로 네 적분은 모두 같다. 어느 적분의 값도 구할 필요가 없었다.

검산

각 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 따로 적용하면 $T \approx U \approx V \approx X \approx 0.177704$를 얻고, 소수점 아래 약 12자리까지 일치한다. 경계항이 0이 됨을 계산기로 빠르게 확인해 보는 것도 안심이 된다. $\ln \frac{1}{2} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{2}$와 $\ln \frac{1}{3} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{3}$은 둘 다 $-0.3807\ldots$로 나온다.

흔한 실수

- $V = U$에서 음의 부호를 빠뜨리는 것. 음의 부호가 세 개 있고(V 앞의 것, $\ln v = -u$, $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$), 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면 네 번째가 생긴다.
- 경계항이 0이 아닌 것처럼 보인다는 이유로, 양 끝에서 값을 계산해 보지도 않고 부분적분을 포기하는 것.
- $\ln \coth x = \operatorname{artanh}(e^{-2x})$로 써서 인수 2를 빠뜨리는 것. 이 2는 나중에 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$의 $\frac{1}{2}$과 약분된다.

STEP 너머

$\operatorname{artanh} t/t$를 거듭제곱급수(power series)로 전개하면 공통의 값이 $\chi_2(\frac{1}{2}) - \chi_2(\frac{1}{3})$임을 알 수 있다. 여기서 $\chi_2(z) = \sum_{k\geq 0} z^{2k+1}/(2k+1)^2$는 르장드르(Legendre)의 카이 함수(chi function)로, 이중로그 함수(dilogarithm) $\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n\geq 1} z^n/n^2$와 가까운 친척이다. 이 함수들에 관한 많은 항등식이 바로 이런 종류의 변수 변환에서 나온다. 두 적분 중 어느 것도 계산하지 않고 둘이 같음을 보이는 것은 해석학(analysis)의 표준적인 기법이며, 치환적분과 부분적분을 정당화하는 정리들(연속성, 미적분의 기본정리(fundamental theorem of calculus))은 해석학 입문 강의에서 엄밀하게 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 정리들의 꼼꼼한 증명을 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.