풀이

STEP III 2011, 문제 5

순수수학 • 적분을 이용한 넓이

> **STEP III 2011, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.9 절 **홀디치의 정리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/holditch.html

핵심 아이디어

데카르트 좌표 공식 $(*)$가 유용한 까닭은 이 공식이 **쌍선형**(*bilinear*)이기 때문이다. 즉 A가 P를 t에만 의존하는 벡터만큼 평행이동한 점이라면, OA가 쓸고 지나간 넓이는 OP가 쓸고 지나간 넓이, 평행이동만으로 생기는 넓이, 그리고 교차항으로 나뉜다. 막대는 바로 이런 평행이동, 곧 단위벡터 $(\cos t, \sin t)$의 상수배에 $\mp$를 붙인 것을 준다. 교차항 f는 계산할 수 없을 것처럼 보이지만, 실제로 계산할 필요가 전혀 없다. A와 B는 모두 같은 곡선 $\mathcal{C}$를 한 바퀴 돌기 때문에 $[A] = [B]$이고, 이 등식이 f를 결정한다.

풀이

넓이 공식

r와 θ가 t의 함수(function)일 때 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$로 두면, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta},$$

이다. 여기서 점은 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$를 나타낸다. 따라서

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\dot{\theta} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

이다. $r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$ 항들이 서로 상쇄되기 때문이다. 적분변수를 θ에서 t로 바꾸면

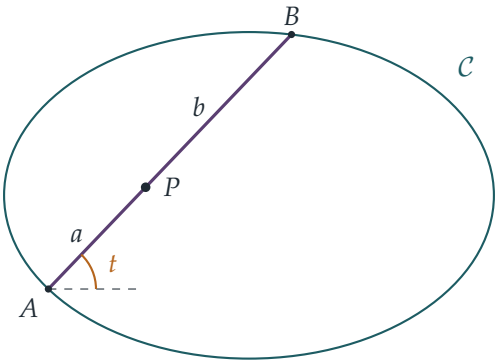
$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\int r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다.

A와 B의 좌표

막대는 A에서 B로 향하는 단위벡터(unit vector) $\mathbf{u} = (\cos t, \sin t)$의 방향을 가리키고, P는 그 사이에 있으며 $AP = a$, $PB = b$이다. 따라서 A는 $P - a\mathbf{u}$이고 B는 $P + b\mathbf{u}$이다.

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$



OA가 쓸고 지나간 넓이

다시 점으로 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$를 나타내자. A에 대하여

$$x_A = x - a\cos t, \quad \dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t, \qquad y_A = y - a\sin t, \quad \dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t.$$

이다. 전개하면

$$x_A\dot{y}_A = x\dot{y} - a\cos t\,(x + \dot{y}) + a^2\cos^2 t,$$
$$y_A\dot{x}_A = y\dot{x} + a\sin t\,(y - \dot{x}) - a^2\sin^2 t,$$

이므로

$$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A = (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2 - a\Big[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t\Big].$$

이다. 이제 t가 0부터 2π까지 변할 때 $(*)$를 적용하자. 첫 번째 괄호는 $[P]$를 주고, 상수 a^2은 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi a^2 = \pi a^2$을 주며, 마지막 항은 f의 정의에 의해 $-af$를 준다. 따라서

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

B의 경우에는 모든 곳에서 $-a$가 $+b$로 바뀌는 것만 다르다(위의 계산에서 a를 $-b$로 바꾸면 된다). 따라서

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

이다.

$\mathcal{C}$와 $\mathcal{D}$ 사이의 넓이

생각해 보기 $[A]$, $[B]$, $[P]$는 실제로 무엇과 같은가?

t가 0부터 2π까지 변하는 동안 막대는 정확히 한 바퀴 회전한다. 두 끝점은 모두 $\mathcal{C}$를 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌아 출발점으로 되돌아온다. 반 바퀴 돌았을 때 A와 B는 서로 자리를 바꾸고, 한 바퀴를 다 돌면 처음 위치로 돌아온다. 원점은 $\mathcal{D}$의 내부에 있으므로 $\mathcal{C}$의 내부에도 있다. 따라서 OA와 OB는 각각 $\mathcal{C}$로 둘러싸인 영역을 정확히 한 번 쓸고 지나가고, OP는 $\mathcal{D}$로 둘러싸인 영역을 한 번 쓸고 지나간다. 이 넓이들을 $|\mathcal{C}|$와 $|\mathcal{D}|$로 쓰면

$$[A] = [B] = |\mathcal{C}|, \qquad [P] = |\mathcal{D}|.$$

이다.

$[A] = [B]$로 두면 $[P]$가 소거된다.

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad (a+b)f = \pi(a^2 - b^2) = \pi(a-b)(a+b).$$

$a + b > 0$이므로(막대의 길이이다) 양변을 나누면 $f = \pi(a-b)$를 얻는다. 따라서

$$|\mathcal{C}| - |\mathcal{D}| = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab.$$

이다. 즉 두 곡선 사이의 넓이는 πab이다. $[B]$를 대신 사용해도 $\pi b^2 + b\pi(a-b) = \pi ab$가 나오므로, 결과가 일관됨을 확인할 수 있어 안심이 된다.

검산

- **원의 경우.** $\mathcal{C}$가 반지름이 R인 원이면, 길이가 $a+b$인 현은 중심으로부터 항상 거리 $d = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2}$만큼 떨어져 있다. 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 P는 중심으로부터 거리 $\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$에 있으므로, $\mathcal{D}$는 반지름의 제곱이 $R^2 - ab$인 동심원이다. 두 원 사이의 넓이는 $\pi R^2 - \pi(R^2 - ab) = \pi ab$이다.
- **대칭성.** 답은 a와 b에 대하여 대칭이며, 당연히 그래야 한다. 막대의 방향을 뒤집으면 두 값의 역할이 바뀌기 때문이다.
- **수치 계산.** $a = 1, b = 1.5$인 막대를 타원 $x^2/16 + y^2/9 = 1$을 따라 움직이고, 그려진 곡선의 넓이를 신발끈 공식(shoelace formula)으로 계산하였다. 두 곡선 사이의 넓이

는 4.712390으로 나와 $\pi ab = 1.5\pi \approx 4.712389$와 일치하였다. 또한 무작위로 고른 곡선 $P(t)$에 대하여 수치적분으로 $[A]$와 $[B]$에 대한 항등식도 확인하였다.

흔한 실수

- $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$의 부호를 틀리는 경우. $-a\cos t$를 미분하면 $+a\sin t$가 된다.
- f를 직접 계산하려고 시도하는 경우. f는 $\mathcal{D}$의 모양에 따라 달라지므로 더 많은 정보 없이는 계산할 수 없다. 핵심은 $[A] = [B]$가 f를 결정한다는 점이다.

STEP 너머

이것은 홀디치 정리(Holditch's theorem, 1858)이다. 즉 $\mathcal{C}$와 $\mathcal{D}$ 사이의 넓이는 $\mathcal{C}$의 모양과 상관없이 오직 a와 b에만 의존한다. 공식 $(*)$는 그린 정리(Green's theorem)의 특수한 경우인데, 그린 정리는 영역 위의 넓이 적분을 그 경계를 따라가는 선적분(line integral)으로 바꾸어 준다. 이것은 또한 경계를 따라 그려서 넓이를 측정하는 기계 장치인 구적기(planimeter)의 원리이기도 하다. 그린 정리는 대학 1학년 벡터 미적분학의 핵심 주제이며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 경계 적분을 아름답게 기하학적인 관점에서 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.