풀이

STEP III 2011, 문제 4

순수수학 • 영 부등식

> **STEP III 2011, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.4 절 **부등식을 증명하는 넓이**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/areas-inequalities.html

핵심 아이디어

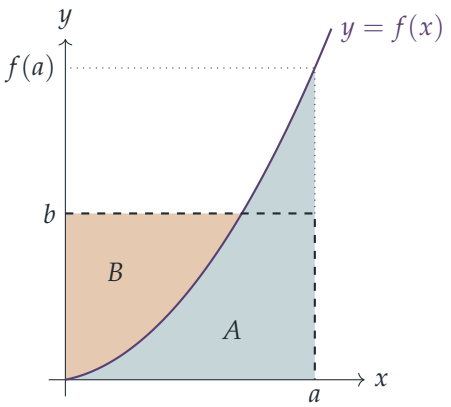
$(*)$의 두 적분(integral)은 모두 같은 그림 위의 넓이이다. $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$는 곡선과 x-축 사이의 넓이이고, $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 곡선과 y-축 사이의 넓이이다. 두 넓이를 합치면 언제나 꼭짓점이 $(0,0)$과 (a,b)인 직사각형을 덮으며, 꼭짓점 (a,b)가 곡선 위에 있지 않으면 남는 부분이 생긴다. 그러면 소문항 (ii)와 (iii)은 f를 골라 적분 두 개를 계산하는 일에 지나지 않는다.

풀이

소문항 (i)

f는 연속(continuous)이고 기울기(gradient)가 양수이므로 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 역함수(inverse function) f^{-1}가 존재하고 이 역시 증가하며, $f(0) = 0$이므로 곡선 $y = f(x)$는 원점에서 시작한다.

$0 \le x \le a$에서 곡선과 x-축 사이의 영역을 A라 하자. 그 넓이는 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$이다. $0 \le y \le b$에서 곡선과 y-축 사이의 영역을 B라 하자. y에 대하여 적분하면 그 넓이는 $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$이다. 두 영역은 곡선의 서로 반대쪽에 있으므로 겹치지 않는다.



먼저 그림처럼 $b \le f(a)$인 경우를 생각하자. 직사각형 $0 \le x \le a, 0 \le y \le b$의 모든 점은 곡선 위 또는 그 아래에 있거나(따라서 A에 속하거나) 곡선 위 또는 그 왼쪽에 있다(따라서 B에 속한다). 그러므로 A와 B를 합치면 넓이가 ab인 직사각형을 덮고, $(*)$가 성립한다. 남는 부분은 A 중에서 직선 $y = b$ 위쪽에 있는 부분, 즉 $f^{-1}(b) \le x \le a$에서 직선과 곡선 사이의 가느다란 조각이다.

반대로 $b \ge f(a)$이면 역할을 바꾸어 같은 논증을 적용하면 된다. 직사각형은 덮이고, 이번에는 B 중에서 직선 $x = a$ 오른쪽에 있는 부분이 남는다.

따라서 $(*)$는 모든 경우에 성립하고, 등호가 성립하려면 남는 부분의 넓이가 0이어야 한다. $a, b > 0$이고 $b \ne f(a)$이면, 남는 부분은 한쪽 끝에서만 만나는 곡선과 직선으로 둘러싸여 있으므로 넓이가 양수이다. 그러므로 $a > 0, b > 0$일 때

$$\text{등호가 성립할 필요충분조건은} b = f(a),$$

즉 직사각형의 꼭짓점 (a, b)가 곡선 위에 있는 경우이다.

소문항 (ii)

$p > 1$일 때 $f(x) = x^{p-1}$은 $x \ge 0$에서 연속이고 $f(0) = 0$이며 그 범위에서 순증가하므로 $(*)$를 적용할 수 있다. (기울기 $(p-1)x^{p-2}$는 $x > 0$에서 양수이다. $p < 2$이면 0에서 발산하지만, 넓이에 관한 논증에는 영향을 주지 않는다.) 역함수는 $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$이다.

조건 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$에서 $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$이므로

$$q = \frac{p}{p-1}, \qquad \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

따라서 $f^{-1}(y) = y^{q-1}$이고, 두 적분은

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y = \frac{b^q}{q}.$$

이를 $(*)$에 대입하면

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

이므로 증명이 끝난다.

생각해 보기 여기서 등호 조건 $b = f(a)$는 무엇을 뜻하며, b^q는 어떻게 간단히 할 수 있을까?

조건은 $b = a^{p-1}$이다. 그러면 $(p-1)q = p$이므로 $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$이다. 따라서

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p = a \cdot a^{p-1} = ab,$$

이므로 실제로 등호가 성립한다.

소문항 (iii)

$0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$에서 $f(x) = \sin x$로 잡자. 이 함수는 연속이고 $f(0) = 0$이며, 기울기 $\cos x$는 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이므로 순증가한다(기울기는 끝점에서만 0이 되며, 이는 논증에 영향을 주지 않는다). 이 함수는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$를 $[0,1]$ 위로 보내고 역함수는 arcsin이며, 이것이 바로 a와 b에 허용된 범위이다.

첫 번째 적분은

$$\int_0^a \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos a.$$

두 번째 적분은 $u = \arcsin y$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y$로 놓고 부분적분(integration by parts)한다.

$$\begin{aligned}\int_0^b \arcsin y \,\mathrm{d}y &= \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= b \arcsin b + \Big[\sqrt{1-y^2}\Big]_0^b \\ &= b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.\end{aligned}$$

둘을 더하면 1이 서로 소거되어 $(*)$는

$$ab \le b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a,$$

가 되고, 이것이 구하는 부등식이며 등호는 $b = \sin a$일 때 성립한다.

생각해 보기 a는 자유롭게 고를 수 있다. 어떤 값을 골라야 원하는 부등식이 나올까?

$t \ge 1$에 대하여 $b = t^{-1}$로 놓으면, 이는 요구대로 $(0,1]$에 속한다. 부등식에 $t > 0$을 곱하고 $t\sqrt{1-t^{-2}} = \sqrt{t^2-1}$($t > 0$이므로 성립)을 이용하면

$$a \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t\cos a \quad \text{임의의} a \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

목표 부등식에는 a가 없고 우변에 t가 있는데, 이는 $a = 0$일 때 $t\cos a$가 되는 값이다. $a = 0$으로 놓으면

$$0 \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t, \qquad \text{즉,} \qquad \arcsin(t^{-1}) \ge t - \sqrt{t^2-1} \quad (t \ge 1).$$

검산

- $t = 1$에서 최종 부등식은 $\frac{1}{2}\pi \ge 1$이 되고, $t = 2$에서는 $\frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 \ge 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$가 된다.
- $t \to \infty$일 때 양변은 모두 $\frac{1}{t}$ 정도의 크기이다. $\arcsin(t^{-1}) \approx t^{-1} + \frac{1}{6}t^{-3}$이고, $t - \sqrt{t^2-1} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$이다. 따라서 이 하계는 실제 값의 약 절반이다.
- 소문항 (iii)의 부등식을 무작위 점 (a, b) 2×10^5개에서 시험해 보았는데, 한 번도 틀리지 않았고 차이는 곡선 $b = \sin a$ 근처에서만 0으로 줄어들었다. 또한 무작위 p, a, b에 대해 영(Young)의 부등식을 확인했고, 두 적분을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $b \le f(a)$인 경우만 그리는 것. $b \ge f(a)$인 경우는 대칭적이지만, 그렇다고 밝혀 두어야 한다.
- $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$이라고 쓴 뒤 $1/(p-1) = q - 1$임을 알아채지 못해서 적분값 b^q/q가 나오지 않는 것.
- 마지막 단계에서 하계를 최적화하는 a를 찾으려 하는 것. 그런 a는 $\arcsin(t^{-1})$이며, 이는 자명한 항등식만 줄 뿐이다. 가장 단순한 선택인 $a = 0$이 통하는 선택이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 영의 부등식(Young's inequality)으로, 횔더(Hölder)의 부등식 $\sum |x_i y_i| \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}$에 이르는 표준적인 경로이며, 횔더 부등식은 다시 해석학의 L^p 공간을 떠받친다. $\int f$와 $\int f^{-1}$를 짝짓는 생각은 르장드르 변환(Legendre transform)과 볼록 쌍대성(convex duality)의 씨앗이며, 이는 역학(라그랑지안(Lagrangian)에서 해밀토니안(Hamiltonian)으로 넘어가는 과정)과 최적화에서 다시 나타난다. 해석학의 배경 지식은 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.