풀이

STEP III 2011, 문제 3

순수수학 • 삼차방정식 풀기

STEP III 2011, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q3

핵심 아이디어

두 세제곱식 $(x-\alpha)^3$과 $(x-\beta)^3$을 쓰면 자유롭게 정할 수 있는 상수 a와 b 두 개가 생기고, x^2항이 없는 최고차항 계수가 1인(monic) 삼차식(cubic)은 네 개의 조건을 준다. 그래서 조건 중 두 개로 a와 b를 구하면, 나머지 두 조건은 이차방정식이 알려 주는 $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$에 관한 사실과 정확히 일치해야 한다. 삼차식을 두 세제곱의 합으로 나타내고 나면, 이를 0으로 놓는 것은 "어떤 비의 세제곱이 상수와 같다"는 꼴이 되고, 이것은 세제곱근(cube root)을, 그것도 세 개 모두 취하여 푼다.

풀이

삼차식을 두 세제곱의 합으로 나타내기

$p \neq 0$이므로 이차방정식 $pt^2 - qt + p^2 = 0$에서

$$\alpha+\beta = \frac{q}{p}, \qquad \alpha\beta = \frac{p^2}{p} = p,$$

이고, 판별식(discriminant)은 $q^2 - 4p^3$이다. 따라서 단서 조건 $q^2 \neq 4p^3$은 정확히 $\alpha \neq \beta$라는 뜻이다. 또한 $\alpha\beta = p \neq 0$이므로 두 근 모두 0이 아니다.

전개하면

$$a(x-\alpha)^3 + b(x-\beta)^3 = (a+b)x^3 - 3(a\alpha+b\beta)x^2 + 3(a\alpha^2+b\beta^2)x - (a\alpha^3+b\beta^3).$$

이것이 $x^3 - 3px + q$와 같으려면

$$a+b=1, \qquad a\alpha+b\beta=0, \qquad a\alpha^2+b\beta^2=-p, \qquad a\alpha^3+b\beta^3=-q.$$

이어야 한다. 처음 두 식은 a와 b에 관한 일차식이다. 두 번째 식에 $b = 1 - a$를 대입하면 $a(\alpha - \beta) = -\beta$를 얻고, $\alpha \neq \beta$이므로 나눌 수 있다.

$$a = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

이제 나머지 두 조건이 저절로 성립함을 확인한다.

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta = -p,$$
$$a\alpha^3 + b\beta^3 = \frac{\beta\alpha^3 - \alpha\beta^3}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta(\alpha + \beta) = -p \cdot \frac{q}{p} = -q.$$

따라서 a와 b를 이렇게 정하면

$$x^3 - 3px + q = \frac{\beta}{\beta - \alpha}(x - \alpha)^3 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(x - \beta)^3,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$x^3 - 24x + 48 = 0$ 풀기

여기서 $p = 8$, $q = 48$이고 $q^2 = 2304 \neq 2048 = 4p^3$이므로 앞의 결과를 적용할 수 있다. 이 차방정식은 $8t^2 - 48t + 64 = 0$, 즉 $t^2 - 6t + 8 = 0$이고, 근은 2와 4이다. $\alpha = 2$, $\beta = 4$로 잡으면 $a = 2$, $b = -1$이므로

$$x^3 - 24x + 48 = 2(x - 2)^3 - (x - 4)^3.$$

(간단히 전개해 보면 확인된다: $2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64$.)

> **생각해 보기** $2(x-2)^3 = (x-4)^3$을 어떻게 풀 수 있는 꼴로 바꿀까?

$(x - 4)^3$으로 나눈다. $x = 4$는 근이 아니므로 $(64 - 96 + 48 = 16)$ 이렇게 해도 된다. 방정식은

$$\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

이 된다. $c = 2^{1/3}$이라 하자. 세제곱이 $\frac{1}{2}$인 복소수는 $k = c^{-1}, c^{-1}\omega, c^{-1}\omega^2$이다. 각각에 대하여 $\frac{x-2}{x-4} = k$를 풀면

$$x - 2 = kx - 4k \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 - 4k}{1 - k},$$

이고, $k \neq 1$이므로 이 식은 타당하다. 대응 $k \mapsto x$는 일대일(one-to-one)이므로 세 개의 k 값은 서로 다른 세 근을 주고, 이것이 삼차식의 근 전부여야 한다.

$k = c^{-1}$일 때는 분자와 분모에 c를 곱하면

$$x = \frac{2c - 4}{c - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3})}{1 - 2^{1/3}},$$

이고, 이것이 문제에 주어진 해이다. $k = c^{-1}\omega$일 때는 ($\omega^3 = 1$을 이용하여) 분자와 분모에 $c\,\omega^{-1} = c\,\omega^2$을 곱하면

$$x = \frac{2c\omega^2 - 4}{c\omega^2 - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega^2)}{1 - 2^{1/3}\omega^2},$$

이고, 같은 방법으로 $k = c^{-1}\omega^2$에서

$$x = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega)}{1 - 2^{1/3}\omega}.$$

를 얻는다. 따라서 세 해는 $j = 0, 1, 2$에 대하여 $x = \dfrac{2(2 - 2^{1/3}\omega^j)}{1 - 2^{1/3}\omega^j}$이다.

$p = r^2, q = 2r^3$인 경우

이제 $q^2 = 4r^6 = 4p^3$이므로, 이는 정확히 앞의 방법이 제외하는 경우이다. 이차방정식 $r^2t^2 - 2r^3t + r^4 = r^2(t - r)^2$은 중근(repeated root) $t = r$를 가지며, a와 b를 구할 수 없다. 그러나 이차방정식의 중근은 삼차식도 중근을 가질 것임을 시사한다. 실제로 $x = r$를 대입하면 $r^3 - 3r^3 + 2r^3 = 0$이고, 도함수(derivative) $3x^2 - 3r^2$도 $x = r$에서 0이 되므로 $(x - r)^2$은 인수이다. x^3항과 상수항을 비교하면

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^2(x + 2r).$$

근은 $x = r$(중근)와 $x = -2r$이다.

? **생각해 보기** 앞의 공식으로 이 근들을 구할 수 있었을까?

그렇지 않다. $\alpha = \beta$이면 두 세제곱이 하나로 합쳐지므로 $a(x - \alpha)^3 + b(x - \alpha)^3$은 $(x - \alpha)^3$의 상수배밖에 될 수 없고, 여기에는 $-3px$에 맞출 x항이 없다. 그래서 다른 접근이 필요했던 것이다. 삼차식을 $(x - r)$의 거듭제곱으로 나타내 보면 대신 어떤 일이 일어나는지 알 수 있다. $x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^3 + 3r(x - r)^2$이므로, 중근은 이차방정식의 중근 $t = r$에 놓인다.

검산

- 실근은 $2(2 - 1.259921)/(1 - 1.259921) \approx -5.694644$이고, 이를 대입하면 약 10^{-13}의 오차 범위에서 $x^3 - 24x + 48 \approx 0$이다. 나머지 두 근은 $2.847322 \pm 0.567212\,\mathrm{i}$이며, 역시 잔차가 0이다.
- 세 근의 합은 (x^2항이 없으므로) 0이고, 곱은 -48이다: $-5.694644 \times (2.847322^2 + 0.567212^2) \approx -48.0$.
- 실근 하나와 복소근 둘이라는 결과는 이론과 맞는다. $x^3 - 3px + q$는 $q^2 < 4p^3$일 때만 세 실근을 가지는데, 여기서는 $q^2 > 4p^3$이다.

- 항등식은 수치적으로 검증할 수 있다. 무작위로 고른 2000개의 (p, q) 쌍에 대하여 무작위 복소수 x에서 항등식을 확인했고, 여러 r 값에 대하여 인수분해 $(x-r)^2(x+2r)$도 확인했다.

흔한 실수

- $\frac{1}{2}$의 실수 세제곱근만 취해서 해를 하나만 구하는 것. 삼차식은 근이 세 개이고, 이들은 세 개의 세제곱근에서 나온다.
- a, b 중 어느 것이 어느 근과 짝을 이루는지 혼동하는 것: a ($(x-\alpha)^3$의 계수)는 분자에 β가 있다.
- 분수를 정리할 때 ω와 ω^2을 바꿔 쓰는 것. 다만 두 답은 켤레(conjugate) 쌍을 이루므로, 어느 쪽으로 해도 최종적인 근의 집합은 같다.

STEP 너머

이것은 흔히 카르다노(Cardano)와 타르탈리아(Tartaglia)의 업적으로 여겨지는 16세기의 삼차방정식 해법의 한 형태이다. 먼저 x^2항이 없는 "축약된(depressed)" 삼차식으로 바꾼 다음, 보조 이차방정식(**분해식**(resolvent))을 푼다. 갈루아 이론(Galois theory)은 삼차식과 사차식에는 왜 이런 분해식이 있고 일반적인 오차식에는 왜 없는지를 설명한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 개념으로 나아가는 읽기 쉬운 길을 제시한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.