풀이

STEP III 2011, 문제 2

순수수학 • 다항식의 유리근

> **STEP III 2011, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q2

핵심 아이디어

$\mathrm{f}(p/q) = 0$의 양변에 q^{n-1}을 곱하면 분모가 하나만 남고 모두 사라진다. 최고차항(leading term)은 p^n/q가 되고 나머지 항은 모두 정수이다. 따라서 p^n/q도 정수여야 하고, p와 q는 공통인수가 없으므로 $q = 1$일 수밖에 없다. 그 뒤로는 각 소문항이 **정수** 근에 관한 문제가 되며, 이런 근은 크기, 나누어떨어짐, 또는 깔끔하게 홀짝성(parity)으로 배제할 수 있다.

풀이

첫 번째 결과

p, q가 서로소(coprime)인 정수이고 $q > 0$일 때 $\mathrm{f}(p/q) = 0$이라 하자. 그러면

$$0 = q^{n-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p\, q^{n-2} + a_0 q^{n-1},$$

이다. 항 $a_k(p/q)^k$는 $a_k p^k q^{n-1-k}$가 되고, $k \le n-1$인 모든 k에 대해 $n-1-k \ge 0$이기 때문이다. 첫째 항을 제외한 모든 항이 정수이므로

$$\frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1}\right)$$

은 정수이다. 즉 q는 p^n을 나눈다.

> ? **생각해 보기** $q \mid p^n$이면 왜 $q = 1$이어야 하는가?

$q > 1$이면 q는 어떤 소인수(prime factor) r를 가진다. 그러면 r는 p^n을 나누고, r가 소수이므로 p 자체를 나누어야 한다. 그런데 그러면 r는 p와 q의 1보다 큰 공통인수가 되므로 모순

이다. 따라서 q는 소인수를 갖지 않고, $q > 0$이므로

$$q = 1.$$

이다. 그러므로 $f(x) = 0$의 모든 유리근(rational root) p/q는 정수 p와 같다. (바로 여기서 f가 **모닉**(monic), 즉 최고차항의 계수가 1이라는 사실을 사용한다는 점에 주목하자. 최고차항의 계수가 a_n이라면 $a_n p^n/q$가 남게 되어 $q \mid a_n$이라는 결론밖에 얻을 수 없다.)

아래에서 유용하게 쓰일 사실 두 가지가 있다. m이 정수근이면

$$m\left(m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0,$$

이므로 m은 a_0을 나눈다. 또한 $a_0 \neq 0$이므로 $m \neq 0$이다.

소문항 (i)

수 $2^{1/n}$은 $x^n - 2 = 0$의 근이며, 이 다항식은 정수 계수를 갖는 모닉 다항식이고 $a_0 = -2 \neq 0$이다. 따라서 $2^{1/n}$이 유리수라면 $m^n = 2$를 만족하는 정수 m이어야 한다. 그런데

$$1^n = 1 < 2 < 4 \leq 2^n,$$

이므로 양의 실수 $2^{1/n}$은 연속한 두 정수 1과 2 사이에 엄격하게 놓이고, 정수가 될 수 없다. 그러므로 모든 $n \geq 2$에 대해 $2^{1/n}$은 무리수(irrational)이다.

소문항 (ii)

여기서 $n = 3$이고 $a_0 = 1$이다. 모든 유리근은 1을 나누는 정수 m이므로 $m = \pm 1$이다. 그런데

$$1^3 - 1 + 1 = 1 \neq 0, \qquad (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \neq 0.$$

이다. 따라서 $x^3 - x + 1 = 0$은 유리근을 갖지 않는다.

(다른 방법: $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$은 연속한 두 정수를 포함하는 곱이므로 짝수이고, 따라서 $m^3 - m + 1$은 홀수이므로 결코 0이 아니다. 이 홀짝성 아이디어가 바로 소문항 (iii)에서 필요한 것이다.)

소문항 (iii)

다항식 $x^n - 5x + 7$은 정수 계수를 갖는 모닉 다항식이고 상수항이 $7 \neq 0$이므로, 모든 유리근은 정수 m이다. $m^n - 5m + 7$이 항상 홀수임을 보이자.

- m이 짝수이면 m^n과 $5m$은 짝수이므로 $m^n - 5m + 7$은 짝수 − 짝수 + 홀수, 즉 홀수이다.
- m이 홀수이면 m^n과 $5m$은 모두 홀수이므로 $m^n - 5m$은 짝수이고 $m^n - 5m + 7$은 홀수이다.

어느 경우든 $m^n - 5m + 7$은 홀수이므로, 특히 0이 아니다. 그러므로 모든 $n \geq 2$에 대해 $x^n - 5x + 7 = 0$은 정수근을 갖지 않고, 따라서 유리근도 갖지 않는다.

(대신 7의 약수를 확인하려면 $m = \pm 1, \pm 7$과 **모든** n에 대해 $m^n - 5m + 7 \neq 0$임을 보여야 한다. 이 방법도 통하지만 더 번거롭다. 홀짝성을 쓰면 모든 n을 한 번에 처리할 수 있다.)

검산

- 유리근을 **갖는** 다항식, 예를 들어 $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$를 시험해 보자. 근 3과 -2는 약속대로 정수이고, $a_0 = -6$을 나눈다.
- 모닉이 아닌 다항식은 정수가 아닌 유리근을 가질 수 있다. 예를 들어 $2x - 1$이 그렇다. 최고차항의 계수가 1이라는 조건이 중요한 이유가 이것이다.
- 수치적으로 $2^{1/2} \approx 1.414$와 $2^{1/3} \approx 1.260$은 1과 2 사이에 있다. 또 $x^3 - x + 1$은 $x = \pm 1$에서 값 1을 가진다. 컴퓨터로 무작위 정수 계수 모닉 다항식 3000개를 탐색한 결과 유리근은 모두 정수였고, $|m| \leq 200$, $2 \leq n \leq 14$에 대해 $m^n - 5m + 7$이 홀수임도 확인되었다.

흔한 실수

- q^{n-1} 대신 q^n을 곱하는 것: 그러면 $p^n = -q(\cdots)$를 얻는다. 이 방법도 통하지만, 그다음에 $q \mid p^n$임을 반드시 밝혀야 한다. q^{n-1}을 곱하면 분수 p^n/q가 이 사실을 명시적으로 드러낸다.
- 이유를 밝히지 않고 "$q \mid p^n$이므로 $q \mid p$"라고 단정하는 것: 이 논증은 q의 소인수를 거쳐야 한다.
- (iii)에서 n의 값 몇 개만 확인하는 것: 논증은 모든 $n \geq 2$에 대해 동시에 성립해야 한다.

STEP 너머

이것은 모닉 형태의 **유리근 정리**(rational root theorem)이다. 즉 정수 계수 모닉 다항식의 근인 유리수는 정수이다. 대수적 정수론(algebraic number theory)의 언어로 말하면 정수는 **정수적으로 닫혀 있다**(integrally closed)고 하며, 정수 계수 모닉 다항식의 근인 수를 대수적 정수(algebraic integer)라고 한다. (iii)의 홀짝성 기법은 다항식을 소수를 법으로 하여 줄이는 방법의 가장 단순한 경우이며, 이는 다항식이 근을 갖지 않음이나 기약(irreducible)임을 증명하는 강력한 도구이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등산술)은 훌륭한 다음 단계이며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대수적인 측면을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.