풀이

STEP III 2011, 문제 11

역학 • 강체의 회전

> **STEP III 2011, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q11

핵심 아이디어

비튼 뒤에도 각 줄은 여전히 천장의 고정점에서 테두리 위의 점, 곧 θ만큼 돌아간 점까지 이어진다. 따라서 각 줄의 수평 성분은 원의 현(chord)이 되므로, 기하학적 관계는 위에서 내려다볼 때 드러난다. 대칭성(symmetry)에 의해 모든 줄이 똑같이 행동하므로, 수직 방향의 평형(equilibrium)이 장력(tension)을 정하고, 장력의 수평 성분들이 축에 대해 갖는 모멘트(moment)가 짝힘(couple)을 준다. 원판을 놓은 뒤에는 에너지 보존(energy conservation)이 나머지를 해결한다.

풀이

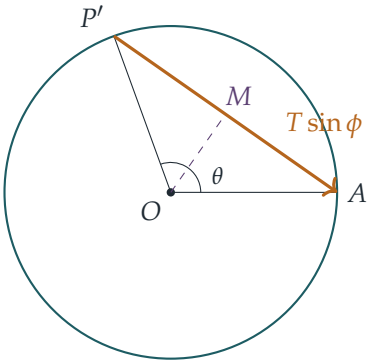
원판은 강체(rigid)인 균일한 박판(lamina)으로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로 모형화한다. 대칭성에 의해 모든 줄은 팽팽하며 같은 장력 T와 같은 기울기 ϕ를 갖고, 원판은 수평을 유지하며 그 중심은 z축 위에 있다. 원판을 θ만큼 돌리면 원판은 천장 아래 깊이 h인 곳까지 올라간다.

줄의 각

P를 지나는 줄은 천장의 $A = (a, 0, 0)$에 매여 있다. 회전한 뒤 줄의 아래 끝은

$$P' = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ -h).$$

에 있다. 위에서 보면 A와 P'은 모두 축을 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에 있고, 중심 O에서 두 점 사이의 각은 θ이다. 따라서 줄의 수평 사영(projection)은 길이가 $2a\sin\frac{1}{2}\theta$인 현이다.



위에서 본 모습. M은 현 $P'A$의 중점이므로 OM은 각 θ를 이등분하고, 현에 수직이며, 길이는 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$이다. 줄 자체의 길이는 b이고 연직선과 각 ϕ를 이루므로, 수평 사영의 길이는 $b\sin\phi$이다. 두 값을 같게 놓으면

$$b\sin\phi = 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 수직 사영은 원판의 새 깊이를 준다.

$$h = b\cos\phi = \sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}.$$

$b > 2a$이므로 이 값은 실수이다. $0 < \theta < \pi$이므로 $0 < \sin\frac{1}{2}\theta < 1$이고, 따라서 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$이다.

짝힘

원판에 대해 수직 방향으로 힘을 분해하면, n개의 같은 장력이 무게를 떠받친다.

$$nT\cos\phi = mg.$$

짝힘 C는 원판의 평면 안에서 작용하므로 이 균형에는 영향을 주지 않는다.

각 장력은 수직 성분과, P'에서 A를 향하는 현을 따르는 수평 성분 $T\sin\phi$를 갖는다. 수직 성분은 축과 평행하므로 축에 대한 모멘트가 없다. 수평 성분은 현을 따라 작용하며, 이 현과 O 사이의 수직 거리는 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$이다. 모든 줄의 수평 방향 당김은 원판을 $\theta = 0$ 쪽으로 되돌리려 하므로, n개의 모멘트는 모두 같은 방향이다. 축에 대한 모멘트를 취하면

$$\begin{aligned} C &= n\,T\sin\phi\cdot a\cos\tfrac{1}{2}\theta = mg\tan\phi\; a\cos\tfrac{1}{2}\theta \\ &= mg\,a\cos\tfrac{1}{2}\theta\cdot\frac{2a\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}} = \frac{mga^2\sin\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $nT = mg/\cos\phi$를 쓰고, 다음으로 $\tan\phi = b\sin\phi/(b\cos\phi)$를, 마지막으로 $2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$를 썼다. 이것이 구하는 크기이다.

정지 상태에서 놓기

짝힘을 없애면 원판은 비틀림이 풀리면서 떨어진다. 줄은 늘어나지 않고 팽팽한 상태를 유지하므로 일을 하지 않는다. 각 줄의 장력은 천장의 고정점에 대한 매달린 점의 상대 속도에 수직이기 때문이다. 일을 하는 힘은 중력뿐이므로 역학적 에너지가 보존된다.

위의 기하학적 관계에 의해, 원판이 줄이 연직인 위치에서 α만큼 돌아갔을 때 그 깊이는

$$z(\alpha) = \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} = \sqrt{b^2 - 2a^2(1 - \cos\alpha)}.$$

이다. 원판의 운동 에너지(kinetic energy)는 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$이며, 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I = \frac{1}{2}ma^2$이다.

? **생각해 보기** 줄이 연직일 때에도 원판의 중심이 여전히 수직 방향 속도를 가질까?

그렇지 않다. 미분하면

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}\,\dot{\alpha} = -\frac{a^2 \sin\alpha}{z}\,\dot{\alpha},$$

이고, 이는 $\alpha = 0$에서 0이다. 그 순간 줄은 연직이고 원판은 가장 낮은 지점에 있으므로, 거기서 운동 에너지는 모두 회전 운동 에너지이다.

원판은 깊이 $\sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$에서 깊이 b까지 떨어진다. 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}ma^2\,\omega^2 = mg\left(b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\right),$$

즉

$$\frac{a^2\omega^2}{4g} = b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

검산

- **가상일**(*virtual work*). 짝힘에 맞서 원판을 $\delta\theta$만큼 더 돌리면 원판은 $-\delta z$만큼 올라가므로 $C = mg\,|\mathrm{d}z/\mathrm{d}\theta| = mg\,a^2 \sin\theta / z$이다. 이는 모멘트를 취해 구한 짝힘과 정확히 같다.
- **작은 비틀림**. θ가 작으면 $C \approx mga^2\theta/b$이며, 이는 익숙한 쌍선 현수(bifilar suspension, 여기서는 n선 현수)의 복원 짝힘이다.
- **수치 계산**. 임의의 a, b, θ, m, n에 대해 n개의 줄을 3차원 공간에 직접 배치하고 장력의 모멘트를 합했다. 그 결과는 공식과 일치했다. 또한 $a = 1, b = 3, \theta = 2, g = 9.81$로 놓고 놓은 뒤의 운동을 수치적으로 적분했다. 줄이 연직이 되었을 때 $a^2\omega^2/(4g) = 0.51651$을 얻었으며, 이는 $3 - \sqrt{9 - 4\sin^2 1} = 0.51651$과 일치한다.

흔한 실수

- 수평 장력의 팔 길이를 $a\cos\frac{1}{2}\theta$가 아니라 a로 잡는 실수. 힘은 접선이 아니라 현을 따라 작용한다.
- 원판을 비틀면 원판이 **올라간다**는 사실을 잊는 실수. 이 높이 변화가 바로 마지막 부분에서 에너지가 나오는 곳이다.
- 병진 운동 에너지 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$를 포함하면서, 줄이 연직일 때 이것이 0이 된다는 점을 알아차리지 못하는 실수.

STEP 너머

이것은 운동이 구속된, 자유도(degree of freedom)가 하나인 계이다. 깊이는 비틀림 각의 정해진 함수이므로 에너지는 α와 $\dot{\alpha}$에만 의존한다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이 관찰을 운동 방정식으로 바꾸어 준다. 또한 짝힘이 왜 단순히 $mg\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}\alpha$인지도 설명해 주는데, 이것이 가상일의 원리이다. $\alpha = 0$ 근처에서 선형화(linearising)하면 단순 조화 비틀림 진동(simple harmonic torsional oscillation)을 얻으며, 쌍선 현수를 이용해 관성 모멘트를 측정하는 방법이 바로 이것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 강체의 회전과 에너지 방법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.