풀이

STEP III 2011, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 단진동

STEP III 2011, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q10

핵심 아이디어

두 입자에는 외부에서 작용하는 수평 방향의 힘이 없으므로, 두 입자의 무게중심(centre of mass)은 충격량(impulse)으로 정해지는 일정한 속력으로 움직인다. 무게중심을 기준으로 보면 줄의 늘어난 길이(extension)는 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 줄은 정확히 반 주기 동안만 팽팽(taut)하다. 운동을 "무게중심의 운동"과 "늘어난 길이의 변화"로 나누면 거의 계산 없이 모든 답이 저절로 나온다.

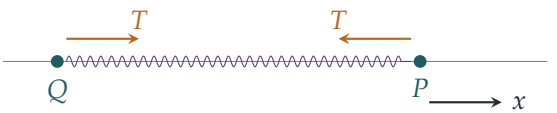
풀이

모형과 설정

두 입자는 매끄러운 수평면 위에서 움직이므로, 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 가벼운 줄의 장력(tension)뿐이며, 이 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이다. 직선 QP를 x축으로 잡고 Q에서 P로 향하는 방향을 양의 방향으로 하며, Q는 $x = 0$에서, P는 $x = a$에서 출발한다고 하자. 충격을 가한 뒤 시각 t에서의 두 입자의 위치를 x_P와 x_Q라 하고,

$$e = (x_P - x_Q) - a$$

를 줄의 늘어난 길이라 하자. 충격 직후에는 $\dot{x}_P = u$, $\dot{x}_Q = 0$이고 $e = 0$이며, $\dot{e} = u > 0$이므로 줄은 곧바로 팽팽해진다.



줄이 팽팽한 동안, 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력은

$$T = \frac{\lambda e}{a} = \frac{\frac{1}{2}ma\omega^2 e}{a} = \tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

이다. 장력은 P를 Q 쪽으로 끌어당기고, Q를 P 쪽으로 끌어당긴다.

$$m\ddot{x}_P = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 e, \qquad m\ddot{x}_Q = +\tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

무게중심

두 식을 더하면 $\ddot{x}_P + \ddot{x}_Q = 0$이다. 따라서 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$에 있는 무게중심 G는 처음 값과 같은 일정한 속도로 움직인다.

$$\dot{\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(u + 0) = \tfrac{1}{2}u.$$

(이것은 바로 운동량 보존(conservation of momentum)이다. 전체 운동량 mu를 질량 $2m$이 나누어 가진다.)

늘어난 길이

두 식을 빼면

$$\ddot{e} = \ddot{x}_P - \ddot{x}_Q = -\omega^2 e.$$

이다. 이것은 각진동수(angular frequency)가 ω인 단진동이다. $e(0) = 0$이고 $\dot{e}(0) = u$이므로

$$e = \frac{u}{\omega}\sin\omega t.$$

이다.

? **생각해 보기** 각진동수가 왜 $\omega/\sqrt{2}$나 $\sqrt{2}\,\omega$가 아니라 ω일까?

각 입자는 힘 $\frac{1}{2}m\omega^2 e$를 받지만, e는 두 입자가 모두 움직이기 때문에 변한다. 두 식을 빼면 가속도가 더해지는 것이다. 같은 말로, 질량이 m으로 같은 두 물체의 환산질량(reduced mass)은 $\frac{1}{2}m$이고 줄의 강성은 $\lambda/a = \frac{1}{2}m\omega^2$이므로 $\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 / \frac{1}{2}m$이다. 탄성계수(modulus)는 이 값이 깔끔하게 나오도록 정해진 것이다.

줄의 길이가 다음으로 a가 되는 것은 다시 $e = 0$이 될 때, 즉 $t > 0$에서 처음으로 $\sin\omega t = 0$이 될 때이다.

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

$0 < t < \pi/\omega$인 동안 내내 $e > 0$이므로, 줄은 실제로 팽팽하고 위의 식들이 성립한다.

이동 거리

각 위치를 무게중심에 간격의 절반을 더하거나 뺀 것으로 나타내면

$$x_P = \bar{x} + \tfrac{1}{2}(a + e), \qquad x_Q = \bar{x} - \tfrac{1}{2}(a + e).$$

이다. t_1에서 다시 $e = 0$이므로, 각 입자는 G와 정확히 같은 만큼 움직였고, 그 값은

$$\tfrac{1}{2}u \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi u}{2\omega}.$$

이다. 이 변위가 곧 이동 거리임을 확인하려면, 어느 입자도 방향을 바꾸지 않는다는 것을 보여야 한다. 미분하면

$$\dot{x}_P = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1 + \cos\omega t), \qquad \dot{x}_Q = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1 - \cos\omega t),$$

이고, 둘 다 모든 t에 대하여 ≥ 0이다. 따라서 각 입자는 앞으로만 움직이며, 요구한 대로 각각 거리 $\dfrac{\pi u}{2\omega}$만큼 이동하였다.

속력

$t_1 = \pi/\omega$에서 $\cos\omega t_1 = -1$이므로

$$\dot{x}_P = 0, \qquad \dot{x}_Q = u.$$

이다. 즉 P는 순간적으로 정지하고 Q는 속력 u로 P를 향해 움직인다. 두 입자는 질량이 같은 물체의 완전탄성충돌(perfectly elastic collision)에서처럼 속도를 정확히 맞바꾸었다. 이것은 우연이 아니다. 운동량이 보존되고, 저장되었던 탄성 에너지가 모두 운동 에너지로 되돌아왔기 때문이다.

충돌까지 걸리는 시간

t_1 이후에는 Q가 P를 향해 움직이므로 간격이 a보다 작다. 줄은 느슨(slack)해져서 힘을 작용하지 않고, 두 입자 모두 수평 방향의 힘을 받지 않는다. 따라서 P는 정지한 채로 있고, Q는 P로부터 거리 a인 곳에서 출발하여 일정한 속력 u로 움직인다. Q는 시간 a/u가 더 지난 뒤 P에 도달한다. 충격을 가한 순간부터 충돌까지 걸리는 전체 시간은

$$\frac{\pi}{\omega} + \frac{a}{u}.$$

이다.

검산

- 운동량: t_1에서 전체 운동량은 $m \cdot 0 + mu = mu$로 처음과 같다. 에너지: 두 순간 모두 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$이고, 두 때 모두 줄은 자연 길이(natural length)이다.
- 차원: u/ω는 길이이고 a/u는 시간이므로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- $m = a = \omega = u = 1$로 두고 운동 방정식을 수치적으로 계산해 보았다. 줄은 $t = 3.14159$에서 느슨해졌고 이때 각 입자는 $1.57080 = \pi/2$만큼 움직였다. 그때의 속력은 0과 1이었고, 충돌은 $t = 4.14159 = \pi + 1$에서 일어났다.

흔한 실수

- P가 고정점에 매달려 있는 것처럼 다루는 것. 그러면 각진동수가 $\omega/\sqrt{2}$가 되어 시간이 틀리게 나온다. 줄의 양 끝이 모두 움직인다.
- t_1 이후에도 단진동이 계속된다고 보는 것. 줄의 길이가 a보다 짧아지면 줄이 느슨해지므로 운동은 등속 운동이 된다.
- 마지막 단계를 아예 빠뜨리는 것. 충돌은 줄이 자연 길이로 돌아온 뒤 a/u만큼 더 지나서 일어난다.

STEP 너머

이체 문제를 무게중심의 운동과, 환산질량 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$가 지배하는 간격의 운동으로 나누는 것은 대학 1학년 역학에서 가장 유용한 기법 가운데 하나이다. 이 방법을 쓰면 행성의 궤도, 진동하는 이원자 분자, 충돌하는 입자들이 모두 일체 문제로 바뀐다. 여기서 탄성 줄은 시간 π/ω 동안 지속되지만 순간적인 탄성 충돌과 결과가 정확히 같은 "부드러운" 충돌의 역할을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이체 문제의 환원과 환산질량을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.