풀이

STEP III 2011, 문제 1

순수수학 • 계수 내림법

> **STEP III 2011, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)은 변수분리형 방정식(separable equation)이며, 여기에는 이유가 있다. 이것은 바로 $(*)$에 $y = ze^{-x}$를 대입했을 때 나타나는 방정식이다. z 자체에 대한 항이 소거되어 z'과 z''만 포함하는 방정식이 남고, 이는 $u = z'$에 대한 1계 방정식이 된다. 이것이 **계수 내림법**(reduction of order)이다. 즉 하나의 해(e^{-x})를 알면 다른 해를 찾을 수 있다. 소문항 (iii)에서는 우변이 있는 상태에서 같은 치환을 수행하며, 그 결과 적분인자(integrating factor)로 푸는 1계 선형 방정식(linear first-order equation)이 된다.

풀이

전체에 걸쳐 $x \neq -1$인 구간에서 생각하므로 $x+1$로 나눌 수 있다.

소문항 (i)

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1},$$

이므로, ($u \neq 0$일 때) 변수를 분리하면 다음을 얻는다.

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|u| = x + \ln|x+1| + c.$$

양변을 지수로 올리면 $|u| = e^c\,|x+1|\,e^x$이다. 부호와 인수 e^c는 하나의 임의의 상수로 합쳐지고, $u = 0$ 역시 해이므로 일반해(general solution)는 다음과 같다.

$$u = C(x+1)e^x, \qquad C\text{는 임의의 상수.}$$

소문항 (ii)

$y = ze^{-x}$로 두면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$y' = (z' - z)e^{-x},$$
$$y'' = (z'' - z')e^{-x} - (z' - z)e^{-x} = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

이를 $(*)$에 대입하고 0이 아닌 인수 e^{-x}를 약분하면

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)(z'' - 2z' + z) + x(z' - z) - z \\ &= (x+1)z'' + (-2(x+1) + x)z' + ((x+1) - x - 1)z \\ &= (x+1)z'' - (x+2)z'. \end{aligned}$$

z 항이 완전히 소거되었다. $u = \dfrac{dz}{dx}$로 두고 $x+1$로 나누면

$$\frac{du}{dx} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = 0,$$

이고, 이는 요구한 대로 $\dfrac{dz}{dx}$에 대한 1계 방정식이다. 이것은 정확히 소문항 (i)의 방정식이다.

생각해 보기 왜 z 항이 사라졌을까? 이를 미리 예측할 수 있었을까?

z의 계수는 $z = 1$을 넣었을 때, 즉 $(*)$에 $y = e^{-x}$를 대입해 보았을 때 얻는 값이다. $(x+1)e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = 0$이므로 $y = e^{-x}$는 이미 해이다. 따라서 상수 z는 반드시 성립해야 하고, z만 단독으로 있는 항은 남을 수 없다. 바로 이 때문에 이 치환을 택한 것이다.

소문항 (i)에 의해 $z' = C(x+1)e^{x}$이다. 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\int (x+1)e^{x}\,dx = (x+1)e^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} + \text{상수},$$

이므로

$$z = Cxe^{x} + B.$$

따라서 $y = ze^{-x} = Cx + Be^{-x}$이고, C를 A로 바꾸어 쓰면

$$y = Ax + Be^{-x},$$

이다. 여기서 A와 B는 임의의 상수이다. 임의의 y는 $z = ye^{x}$로 두어 ze^{-x} 꼴로 쓸 수 있으므로 $(*)$의 모든 해가 이런 방식으로 얻어진다. 따라서 요구한 대로 이것이 일반해이다.

소문항 (iii)

같은 치환을 하면 우변만 바뀌는데, 우변은 $(x+1)^2$을 e^{-x}로 나눈 것이 된다.

$$(x+1)z'' - (x+2)z' = (x+1)^2e^{x}.$$

$u = z'$으로 두고 $x+1$로 나누면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

이것은 선형이다. 소문항 (i)에서 $(x+1)\mathrm{e}^x$는 동차 방정식(homogeneous equation)의 해이므로, 그 역수 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$이 적분인자이다. (이는 부호를 제외하면 $\exp(-\int \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x)$이다.) 양변에 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u\,\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad u = (x+1)\mathrm{e}^x(x+k)$$

이고, 여기서 k는 상수이다. 그러므로

$$z' = (x^2+x)\mathrm{e}^x + k(x+1)\mathrm{e}^x.$$

둘째 항은 소문항 (ii)에서처럼 적분하면 $kx\mathrm{e}^x$가 된다. 첫째 항은 부분적분을 두 번 하면

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - (2x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + \text{상수} = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + \text{상수}.\end{aligned}$$

따라서 $z = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + kx\mathrm{e}^x + B$이고

$$y = z\mathrm{e}^{-x} = x^2 - x + 1 + kx + B\mathrm{e}^{-x}.$$

$-x$는 임의의 항 kx와 합쳐지므로, $A = k-1$로 두면 일반해는

$$y = x^2 + 1 + Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

이고, 여기서 A와 B는 임의의 상수이다.

다른 방법으로, 우변이 이차식이므로 특수해(particular integral) $y = px^2+qx+r$을 시도해 볼 수 있다. 대입하면 $(x+1)2p + x(2px+q) - (px^2+qx+r) = px^2+2px+2p-r$이고, 이를 x^2+2x+1과 비교하면 $p=1, r=1$이며 q는 자유롭다(x가 여함수(complementary function)이기 때문이다). 여기에 소문항 (ii)의 여함수를 더하면 같은 답을 얻는다.

검산

$y = x^2+1$을 직접 대입해 보자. $y' = 2x$, $y'' = 2$이므로 좌변은 $2(x+1) + 2x^2 - x^2 - 1 = x^2+2x+1 = (x+1)^2$이 되어 필요한 대로 성립한다. 수치적으로는, 임의의 A, B와 임의의 $x \in (-0.9, 3)$에 대해 $y = x^2+1+Ax+B\mathrm{e}^{-x}$의 유한 차분(finite-difference) 도함수가 약 3×10^{-6} 이내의 오차로 방정식을 만족한다. 같은 검사로 소문항 (i)과 (ii)도 확인된다.

흔한 실수

- y''을 잘못 구하는 것: y''은 $(z'' - 2z' + z)\mathrm{e}^{-x}$이고, z 앞의 부호는 **플러스**이다. 여기서 부호를 틀리면 엉뚱한 z 항이 남는다.
- 소문항 (iii)에서 인수 e^{-x}를 약분할 때 우변에 e^{x}를 곱하는 것을 잊는 것.
- 상수를 빠뜨리는 것: 최종 답에는 각 적분에서 하나씩, 두 개의 임의의 상수가 필요하다.

STEP 너머

계수 내림법은 일반적인 기법이다. y_1이 2계 선형 방정식의 해이면, $y = y_1 v$로 두었을 때 항상 v 항이 사라지고 v'에 대한 1계 방정식이 남는다. 이것은 또한 **매개변수 변환법**(variation of parameters)의 바탕이 되는 아이디어이기도 한데, 이 방법은 임의의 우변에 대해 특수해를 만들어 낸다. 두 방법 모두 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 명료하게 설명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.