풀이

# STEP II 2011, 문제 9

역학 • 충돌과 반발계수

**STEP II 2011, 9번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

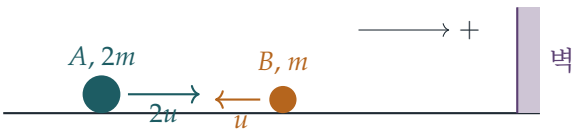
step.maths.org/questions/11-s2-q9

## 핵심 아이디어

여기서 일어나는 충돌(collision)은 모두 정면 충돌(direct collision)이므로, 각 충돌은 똑같은 두 방정식, 곧 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)으로 해결된다. 실제로 위험한 것은 부호뿐이다. 처음에 양의 방향 하나(벽을 향하는 방향)를 정하고, 모든 속도를 그 방향에 대한 부호 있는 수로 쓰면 계산은 저절로 풀린다. 그러면 마지막 주장은 어떤 식 하나가 항상 양수임을 보이는 문제로 귀결되는데, 그 식이 $f$에 대해 선형(linear)이므로 $f$의 범위의 양 끝만 살펴보면 된다.

## 풀이

**모형.** $A$와 $B$를 매끄러운(smooth) 평면 위의 입자(particle)로 다루므로, 충돌 순간을 제외하면 수평 방향의 힘은 작용하지 않는다. 또한 벽은 매끄러우므로 $B$의 속도를 ($f$배로 줄이면서) 반대로 바꾸기만 한다. 첫 번째 충돌 후 $B$는 계속 나아가 벽에 부딪히므로, 벽은 $B$ 쪽, 곧 $A$가 원래 움직이던 방향으로 $B$보다 더 먼 곳에 있다. 이 방향을 양의 방향으로 잡는다. 그러면 직선 위의 순서는 항상 $A$, $B$, 벽이다.



### 첫 번째 충돌

충돌 전 $A$의 속도는 $2u$이고 $B$의 속도는 $-u$이다. 충돌 후 두 입자의 속도를 각각 $v_A$, $v_B$라 하자. 운동량이 보존되므로

$$2m(2u) + m(-u) = 2m\,v_A + m\,v_B \quad \Longrightarrow \quad 2v_A + v_B = 3u.$$

접근 속력은 $2u - (-u) = 3u$이다. $B$가 $A$보다 앞에 있으므로 분리 속력은 $v_B - v_A$이고, 뉴턴의 반발 법칙에 의해

$$v_B - v_A = 3eu.$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $3v_A = 3u - 3eu$이므로

$$v_A = (1-e)u, \qquad v_B = (1+2e)u.$$

둘 다 $\geq 0$이므로, 충돌 후 $A$는 속력 $(1-e)u$로 벽을 향해 움직이고($e = 1$이면 정지해 있고), $B$는 속력 $(1+2e)u$로 벽을 향해 움직인다. 이는 그 뒤 $B$가 벽에 도달한다는 사실과 들어맞는다.

### 벽

벽은 매끄럽고 충돌은 정면 충돌이므로, $B$는 직선을 따라 속력 $f(1+2e)u$로 튕겨 나온다. 그 속도는 $-f(1+2e)u$가 된다. 한편 $A$에는 아무 힘도 작용하지 않으므로 여전히 속도 $(1-e)u \geq 0$으로 움직인다. 이제 $B$가 $A$를 향해 움직이므로 두 입자는 반드시 다시 만난다.

### 두 번째 충돌

두 번째 충돌 직전의 속도는

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ -f(1+2e)u.$$

충돌 후 속도를 각각 $w_A$, $w_B$라 하자. 운동량 보존에 의해

$$2w_A + w_B = 2(1-e)u - f(1+2e)u.$$

**생각해 보기** 이번에는 반발 방정식을 어느 쪽 순서로 써야 하는가?

여전히 $B$가 벽에 더 가까운 입자이므로 분리 속도는 여전히 $w_B - w_A$이다. 접근 속력은 $A$의 속도에서 $B$의 속도를 뺀 값, 곧 $(1-e)u + f(1+2e)u$이다. 따라서

$$w_B - w_A = e[(1-e)u + f(1+2e)u].$$

$w_B$만 남기기 위해 이 식의 두 배를 운동량 방정식에 더하면

$$\begin{aligned} 3w_B &= 2(1-e)u - f(1+2e)u + 2e(1-e)u + 2ef(1+2e)u \\ &= 2(1-e)(1+e)u + f(1+2e)(2e-1)u \\ &= 2(1-e^2)u - (1-4e^2)fu. \end{aligned}$$

그러므로

$$w_B = \tfrac{2}{3}(1-e^2)u - \tfrac{1}{3}(1-4e^2)fu,$$

이며, 이는 양의 방향, 곧 벽을 향하는 방향으로 잰 값이다. 이것이 구하려던 결과이다.

#### $B$는 항상 벽을 향해 움직인다

모든 $0 < e \le 1$과 $0 < f \le 1$에 대해 $w_B > 0$임을 보여야 한다. $u > 0$이므로, 이는 다음을 보이는 것과 같다.

$$g(f) = 2(1-e^2) + (4e^2-1)f > 0.$$

항 $1-4e^2$는 양수일 수도 음수일 수도 있으므로 그냥 버릴 수는 없다. 대신 $e$를 고정하면 $g$는 $f$에 대해 선형이고,

$$g(0) = 2(1-e^2) \ge 0, \qquad g(1) = 2 - 2e^2 + 4e^2 - 1 = 1 + 2e^2 > 0.$$

임에 주목하자. $[0,1]$ 위의 선형 함수는 양 끝값의 가중평균(weighted average)이다: $g(f) = (1-f)\,g(0) + f\,g(1)$. $0 < f \le 1$이면 첫째 항은 $\ge 0$이고 둘째 항은 ($f > 0$이고 $g(1) > 0$이므로) 엄격하게 양수이므로 $g(f) > 0$이다. 따라서 $w_B > 0$이고, $e$와 $f$의 값이 무엇이든 두 번째 충돌 후 $B$는 벽을 향해 움직인다.

## 검산

- $e = f = 1$(처음부터 끝까지 완전 탄성(perfectly elastic))이면, $A$는 첫 번째 충돌에서 완전히 멈추고, $B$는 $3u$로 나갔다가 $3u$로 돌아와 질량이 자신의 두 배인 정지한 입자에 부딪힌다. 공식은 $w_B = 0 + u = u$를 주며, 이는 탄성 충돌의 결과 $\frac{m-2m}{3m}(-3u) = u$와 일치한다.
- $e = f = \frac{1}{2}$이면 공식은 $w_B = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}u = \frac{1}{2}u$를 준다. 위치와 충돌을 단계별로 시뮬레이션해도 같은 값 $0.5u$가 나온다.
- 부호에 대해 가장 불리한 경우는 $e = 1$이고 $f$가 작을 때이다. 이때 $w_B = fu$로, 작지만 여전히 양수이다.

## 흔한 실수

- 두 번째 충돌에서 부호 있는 속도 대신 속력을 써서, $B$가 튕겨 나오는 속도의 부호를 틀리게 얻는 것.
- $B$가 "벽에서 왔다"는 이유로 반발 방정식을 $w_A - w_B$로 쓰는 것. 직선 위에서 입자들의 순서는 바뀌지 않았으므로, 분리 속도는 여전히 $w_B - w_A$이다.
- $1 - 4e^2 > 0$이라고 가정하여 $w_B > 0$이라고 주장하는 것. 이 가정은 $e > \frac{1}{2}$이면 성립하지 않으며, 바로 그 때문에 논증에서 $f \leq 1$을 써야 한다.

## STEP 너머

반발은 경험적 모형(empirical model)이다. 대학 1학년 과정에서는 이를 더 깔끔한 개념인 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)와 함께 배운다. 이 좌표계에서는 전체 운동량이 0이고, 반발 계수(coefficient of restitution)가 $e$인 충돌은 두 속도에 단순히 $-e$를 곱할 뿐이다. 그러면 첫 번째 충돌 같은 결과는 거의 곧바로 얻어진다. 벽과의 반복된 충돌은 당구 문제와 세기 논증에서 다시 등장하는데, 두 블록과 벽 사이의 충돌 횟수가 $\pi$의 자릿수를 주는 유명한 예가 그렇다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 운동량과 충돌을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.