풀이

STEP II 2011, 문제 8

순수수학 • 원의 신개선

> **STEP II 2011, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q8

핵심 아이디어

매 순간 실은 두 부분으로 이루어진다. 하나는 원의 호(arc)로, 그 길이는 각도에서 바로 읽어 낼 수 있고, 다른 하나는 접선(tangent)을 따라 원을 떠나는 곧은 부분이다. 전체 길이가 고정되어 있으므로 곧은 부분의 길이는 남은 길이와 같고, 접선은 반지름에 수직이므로 벡터(vector)를 이용하면 B의 위치를 쉽게 구할 수 있다. 마지막 넓이를 구할 때는, 쓸고 지나간 영역 전체가 "바깥쪽 가지 아래의 넓이에서 안쪽 가지 아래의 넓이를 빼고, 다시 반원을 뺀 것"임에 주목한다.

풀이

매개변수방정식

실이 원을 떠나는 점을 $P = (\cos t, \sin t)$라 하자. 즉 t는 양의 x축에서 OP까지의 각이다. 처음에는 $P = A = (-1, 0)$이므로 $t = \pi$이다. 실이 원의 위쪽을 넘어 감겨 감에 따라 P는 시계 방향으로 움직이고 t는 0까지 감소한다.

실 가운데 원에 닿아 있는 부분은 각 π에서 각 t까지의 호이다. 반지름이 1이므로 이 호의 길이는 $\pi - t$이다. 실의 길이는 π이므로 곧은 부분 PB의 길이는

$$\pi - (\pi - t) = t.$$

이다. 실이 팽팽하므로 PB는 P에서 원에 접하고, 따라서 $OP = (\cos t, \sin t)$에 수직이다. OP에 수직인 두 단위벡터는 $\pm(\sin t, -\cos t)$이다. 처음($t = \pi$)에 실은 A에서 곧장 위쪽, 즉 $(0, 1) = (\sin \pi, -\cos \pi)$ 방향을 향하고, 연속성(continuity)에 의해 부호는 내내 같게 유지된다. 따라서

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + t\,(\sin t, -\cos t),$$

즉

$$x = \cos t + t\sin t, \qquad y = \sin t - t\cos t,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (확인: $t = \pi$이면 B의 처음 위치인 $(-1, \pi)$가 되고, $t = 0$이면 B가 원과 만나는 점 $(1, 0)$이 된다.)

x의 최댓값

미분하면 $\pm\sin t$ 항과 $\pm\cos t$ 항이 상쇄된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \pi$에서 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\cos t$는 $t < \frac{\pi}{2}$일 때 양수이고 $t > \frac{\pi}{2}$일 때 음수이다. 그러므로 t가 $[0, \pi]$를 지나는 동안 x는 증가하다가 감소하며, 최댓값은

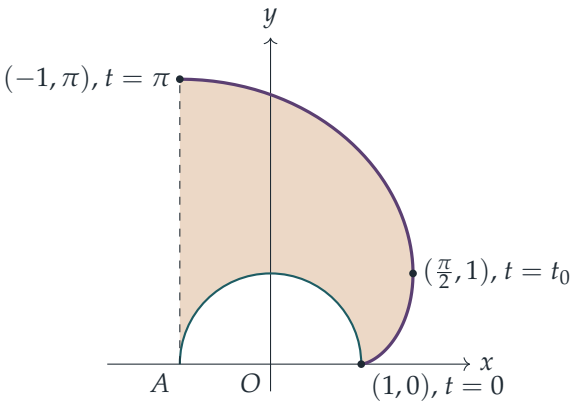
$$t_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{이때} (x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

에서 얻어진다.

개형 그리기

두 가지 사실이 도움이 된다. 첫째, $0 < t \le \pi$에서 $y > 0$이다. $t \le \frac{\pi}{2}$이면 $\tan t > t$이므로 $y = \cos t\,(\tan t - t) > 0$이고($t = \frac{\pi}{2}$일 때는 바로 $y = 1$이다), $t > \frac{\pi}{2}$이면 $\cos t < 0$이므로 y의 두 항이 모두 음이 아니어서 $\sin t - t\cos t > 0$이다. 둘째, $x^2 + y^2 = 1 + t^2$이므로 B는 항상 원의 바깥에 있고, 원에서 떨어진 정도는 t와 함께 커진다. 또한 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t\sin t \ge 0$이므로 y는 t와 함께 꾸준히 증가한다.

따라서 곡선은 $(1, 0)$에서 출발하여(여기서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan t = 0$이므로 x축을 수평으로 떠난다), 가장 오른쪽 점 $(\frac{\pi}{2}, 1)$까지 올라가서 그곳에서 수직이 되고, 다시 원의 위쪽을 넘어 되돌아가 $(-1, \pi)$에 이르러 다시 수평이 된다. 이 곡선을 원의 **신개선**(involute)이라 한다.



곡선, 실의 처음 위치(점선), 반원으로 둘러싸인 색칠한 영역이 실이 쓸고 지나간 넓이이다.

$\pi \geq t \geq t_0$일 때의 넓이

곡선의 이 부분에서 x는 $\frac{\pi}{2}$($t = \frac{\pi}{2}$일 때)에서 -1($t = \pi$일 때)까지 감소하고, $y > 0$이다. 따라서 이 호와 x축 사이의 넓이는

$$\int_{-1}^{\pi/2} y \,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{\pi/2} y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} (t^2 \cos^2 t - t \sin t \cos t) \,\mathrm{d}t,$$

이다. 여기서 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어 음의 부호를 흡수하였다. 두 개의 적분이 필요한데, 둘 다 배각 공식(double-angle formula)을 쓴 뒤 부분적분(integration by parts)으로 구한다. $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$, $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$로 쓰자. 부분적분하면

$$\begin{aligned}
\int t \sin 2t \,\mathrm{d}t &= -\tfrac{1}{2} t \cos 2t + \tfrac{1}{4} \sin 2t, \\
\int t^2 \cos 2t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} t^2 \sin 2t - \int t \sin 2t \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} t^2 \sin 2t + \tfrac{1}{2} t \cos 2t - \tfrac{1}{4} \sin 2t.
\end{aligned}$$

이다. $t = \pi$에서 $\sin 2t = 0$, $\cos 2t = 1$이고, $t = \frac{\pi}{2}$에서 $\sin 2t = 0$, $\cos 2t = -1$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi} t \sin t \cos t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \Big[-\tfrac{1}{2} t \cos 2t \Big]_{\pi/2}^{\pi} = \tfrac{1}{2} \Big(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Big) = -\frac{3\pi}{8}, \\
\int_{\pi/2}^{\pi} t^2 \cos^2 t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \Big[\tfrac{1}{3} t^3 \Big]_{\pi/2}^{\pi} + \tfrac{1}{2} \Big[\tfrac{1}{2} t \cos 2t \Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7\pi^3}{48} + \tfrac{1}{2} \Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Big) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 구하는 넓이는

$$\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8} - \Big(-\frac{3\pi}{8} \Big) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}.$$

이다.

실이 쓸고 지나간 넓이

> **생각해 보기** $t \geq t_0$인 호 아래의 영역에는 쓸고 지나간 영역보다 더 많은 부분이 들어 있다. 무엇을 빼야 하는가?

방금 구한 넓이는 $-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$에서 바깥쪽 호($t_0 \leq t \leq \pi$)와 x축 사이의 모든 부분이다. 쓸고 지나간 영역은 여기서 그 아래에 놓인 두 조각을 뺀 것이다. 하나는 넓이가 $\frac{\pi}{2}$인 위쪽 반원이고, 다른 하나는 $1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$에서 안쪽 호($0 \leq t \leq t_0$)와 x축 사이의 가느다란 조각이다. 안쪽 호는 원의 바깥에 있고($t > 0$이면 $x^2 + y^2 = 1 + t^2 > 1$이므로) 바깥쪽 호의 아래에 있으므로, 이 조각들은 서로 겹치지 않고 빼는 것이 정당하다.

안쪽 호에서는 x가 t와 함께 증가하므로, 가느다란 조각의 넓이는

$$\int_{0}^{\pi/2} y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi/2} (t \sin t \cos t - t^2 \cos^2 t) \,\mathrm{d}t.$$

이다. 같은 원시함수(antiderivative)를 쓰되 이번에는 아래끝을 $t = 0$으로 하면(여기서 $\sin 2t = 0, \cos 2t = 1$),

$$\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2} t \cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$
$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{24} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2} t \cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

이므로 가느다란 조각의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^3}{48}$(약 0.14로, 작은 양수이니 안심이 된다)이다. 따라서 실이 쓸고 지나간 넓이는

$$\left(\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi^3}{48} = \frac{\pi^3}{6}.$$

이다.

검산

- 마지막 답에 이르는 더 매끄러운 방법이 있다. t가 δt만큼 감소하면, 실의 곧은 부분(길이 t)은 사실상 고정된 점을 중심으로 각 δt만큼 회전하여 넓이가 약 $\frac{1}{2}t^2\,\delta t$인 얇은 부채꼴을 쓸고 지나간다. 이것들을 모두 더하면 $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6}$이 되어 답과 일치한다.
- 수치적으로 확인하면, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 바깥쪽 호 아래의 넓이는 6.87794로 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}$와 일치하고, 색칠한 영역의 경계에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용하면 $5.16771 \approx \frac{\pi^3}{6}$을 얻는다.

흔한 실수

- 곧은 부분의 길이를 $\pi - t$로 잡거나(그것은 호의 길이이다), 두 접선 방향 가운데 틀린 쪽을 고르는 실수. $t = \pi$를 확인해 보면 둘 다 잡아낼 수 있다.
- 그 호를 따라 x가 감소한다는 것을 알아차리지 못하고 적분 구간을 t_0에서 π까지로 그대로 두어, 음수인 "넓이"를 얻는 실수.
- 안쪽 호 아래의 작은 영역을 잊어버려 쓸고 지나간 넓이를 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}$로 얻는 실수.

STEP 너머

어떤 곡선에서 풀려 나오는 실의 끝이 그리는 곡선을 신개선이라 하고, 실이 풀려 나오는 원래 곡선을 그 축폐선(evolute)이라 한다. B에서 신개선의 곡률 중심(centre of curvature)은 바로 실이 원을 떠나는 점 P이다. 원의 신개선은 대부분의 톱니바퀴 이의 모양을 이룬다. 그런 두 이가 서로 맞물려 구를 때 속도비가 일정하게 유지되기 때문이다.

검산에서 쓴 "얇은 부채꼴" 논증은 극좌표 넓이 공식(polar-area formula) $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$를 모습만 바꾼 것이다. 곡률(curvature)과 이런 종류의 곡선에 대해 더 알고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 그 바탕에 있는 엄밀한 미적분에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.