풀이

STEP II 2011, 문제 7

순수수학 • 수열과 급수

> **STEP II 2011, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q7

핵심 아이디어

수열을 항별로 다루지 않는다. 모든 합을 λ의 거듭제곱의 합과 μ의 거듭제곱의 합으로 나누고, 각각에 등비급수(geometric series)의 합 공식을 쓴다. 두 수는 $\lambda+\mu=2$와 $\lambda\mu=-1$을 만족하므로 $x^2=2x+1$의 두 근이다. 이 이차방정식(quadratic) 하나로 성가신 분모가 모두 정리된다. 또 다른 도구는 제곱이다. b_k^2와 a_k^2는 모두 a_{2k}에 상수를 더한 꼴이 된다.

풀이

먼저 풀이 전체에서 쓸 사실들을 정리해 둔다.

$$\lambda-1=\sqrt{2}, \qquad \mu-1=-\sqrt{2}, \qquad \lambda\mu=1-2=-1, \qquad \lambda-\mu=2\sqrt{2}.$$

또한 $a_0=2$이고 $b_0=0$이다.

소문항 (i)

$\lambda\neq 1$이고 $\mu\neq 1$이므로 각 합에 등비급수의 합 공식을 쓸 수 있다.

$$\sum_{r=0}^{n}\lambda^r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}, \qquad \sum_{r=0}^{n}\mu^r=\frac{\mu^{n+1}-1}{\mu-1}=-\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}.$$

첫 번째 합에서 두 번째 합을 빼면

$$\sum_{r=0}^{n}b_r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{a_{n+1}-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{n+1},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 반대로 두 합을 더하면 -1들이 소거된다.

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} a_r = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b_{n+1}.}$$

(간단한 확인: $n=0$이면 이 식은 $a_0 = b_1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2$가 되어 옳다.)

소문항 (ii)

소문항 (i)에 의해 안쪽 합은 $b_{m+1}/\sqrt{2}$이다. 따라서

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{2n} b_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{2n+1} b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=0}^{2n+1} b_s,$$

이고, 마지막 단계는 $b_0 = 0$이기 때문에 성립한다. 이제 소문항 (i)에서 n 대신 $2n+1$을 넣으면

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2} + \frac{a_{2n+2}}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1. \qquad (*)$$

을 얻는다.

> **?** **생각해 보기** a_{2n+2}를 b_{n+1}^2와 어떻게 연결할 수 있을까?

제곱을 하고, 교차항에는 $\lambda\mu = -1$을 쓴다.

$$b_{n+1}^2 = \lambda^{2n+2} + \mu^{2n+2} - 2(\lambda\mu)^{n+1} = a_{2n+2} - 2(-1)^{n+1}, \qquad a_{n+1}^2 = a_{2n+2} + 2(-1)^{n+1}.$$

n이 홀수이면 $n+1$은 짝수이므로 $b_{n+1}^2 = a_{2n+2} - 2$이다. 그러면 $(*)$는 $\frac{1}{2}(a_{2n+2}-2) = \frac{1}{2}b_{n+1}^2$와 같으므로 원하는 결과를 얻는다.

n이 짝수이면 $(-1)^{n+1} = -1$이므로, 이번에는 a_{n+1}^2가 $a_{2n+2} - 2$와 같다. 따라서

$$\boxed{n\text{이 짝수}: \quad \sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2}$$

이고, 이는 $\frac{1}{2}b_{n+1}^2 - 2$와 같다.

소문항 (iii)

소문항 (i)과 소문항 (ii)의 제곱 항등식에 의해

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \tfrac{1}{2}b_{n+1}^2 = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}.$$

두 번째 합도 다시 두 등비급수로 나누는데, 이번에는 공비가 λ^2와 μ^2이다.

$$\sum_{r=0}^{n} \lambda^{2r+1} = \lambda\,\frac{\lambda^{2n+2}-1}{\lambda^2-1}.$$

? 생각해 보기 $\lambda^2 - 1$을 간단히 할 수 있을까?

그렇다. $\lambda^2 = 2\lambda + 1$이므로 $\lambda^2 - 1 = 2\lambda$이고, 따라서 인수 λ가 약분되어 합은 $\frac{1}{2}(\lambda^{2n+2} - 1)$이 된다. μ도 같은 이차방정식을 만족하므로 $\mu^2 - 1 = 2\mu$이고, μ에 대한 합은 $\frac{1}{2}(\mu^{2n+2} - 1)$이다($\mu^2 \neq 1$이므로 공식을 쓸 수 있다는 점에 주의한다). 두 합을 더하면

$$\sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_{2n+2} - 2\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1.$$

따라서

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 - \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}\right) - \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1\right) = 1 + (-1)^n.$$

n이 짝수이면 이 값은 2이므로 원하는 결과를 얻는다. n이 홀수이면 이 값은 0이므로

$$n\text{이 홀수 :} \quad \left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1}.$$

검산

a_n은 $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$을 만족하는 정수이다: $2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \ldots$. 소문항 (ii)에서 $n = 3$일 때, 부분합(partial sum) $2, 4, 10, 24, 58, 140, 338$을 모두 더하면 576이다. $b_4 = 24\sqrt{2}$이므로 $\frac{1}{2}b_4^2 = 576$이 되어 일치한다. 소문항 (iii)에서 $n = 2$이면 $(2+2+6)^2 - (2+14+82) = 100 - 98 = 2$이다. $n = 1$이면 $(2+2)^2 - (2+14) = 0$이다. 컴퓨터로 세 소문항 모두를, 홀짝(parity) 두 경우를 포함하여 24 이하의 모든 n에 대해 확인하였다.

흔한 실수

- $\mu - 1 = -\sqrt{2}$가 음수라는 것을 잊어서, 소문항 (i)에서 a와 b의 역할이 뒤바뀐다.
- $(-1)^{n+1}$ 대신 $(\lambda\mu)^{n+1} = 1$로 쓴다. 홀수와 짝수로 나누는 핵심이 바로 이 부호이다.
- 소문항 (ii)에서 b_{m+1}의 합의 첨자를 옮기면서, 합을 0부터 시작할 수 있게 해 주는 것이 $b_0 = 0$이라는 점을 놓친다.

STEP 너머

두 수열은 모두 선형 점화식(linear recurrence) $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$을 만족하며, 그 특성방정식(characteristic equation)은 $x^2 = 2x + 1$이다. 따라서 λ와 μ는 그 근이고, a_n과 b_n은 특

수해이다. $\lambda^n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$이므로 항등식 $\lambda^n \mu^n = (-1)^n$은 $a_n^2 - b_n^2 = 4(-1)^n$이 되는데, 이는 환(ring) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$에서의 펠 방정식(Pell-type equation) 꼴이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 이러한 단원(unit)과 $\sqrt{2}$의 연분수(continued fraction)가 어떻게 서로 맞물리는지 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.