풀이

STEP II 2011, 문제 6

순수수학 • 부분적분

> **STEP II 2011, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q6

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $[f'(x)]^2[f(x)]^n$은 f' 인수 하나만 없으면 보자마자 적분할 수 있는 꼴이 된다. $f'(x)[f(x)]^n$은 $[f(x)]^{n+1}/(n+1)$의 도함수이기 때문이다. 그래서 그 부분을 떼어 내어 부분적분(integration by parts)을 한다. 남는 적분에는 f''이 들어 있는데, 조건 $f'' = kff'$을 쓰면 이것이 다시 같은 쉬운 꼴 $f'f^m$으로 돌아온다. 그러면 응용 문제는 주어진 피적분함수가 $[f']^2 f^n$이 되도록 f와 n을 고르고 k를 구하는 문제로 귀결된다.

풀이

일반적인 결과

$f(x)$를 f로 쓰고, 다른 것도 마찬가지로 줄여 쓴다. $u = f'$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'f^n$으로 두고 부분적분하면 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f''$, $v = \dfrac{f^{n+1}}{n+1}$이다($n \geq 1$이므로 $n+1 \neq 0$이어서 문제없다).

$$\begin{aligned} I = \int f' \cdot f'f^n \,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int f''f^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{k}{n+1}\int f'f^{n+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{다음을 이용: } f'' = kff' \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{kf^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + C. \end{aligned}$$

따라서

$$\boxed{I = \frac{f'(x)\,[f(x)]^{n+1}}{n+1} - \frac{k\,[f(x)]^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + C}$$

이고, 이는 요구한 대로 $f(x)$, $f'(x)$, k, n으로 나타낸 식이다.

소문항 (i)

$f(x) = \tan x$이면 $f'(x) = \sec^2 x$이고

$$f''(x) = 2\sec x \cdot \sec x \tan x = 2\tan x \sec^2 x = 2f(x)f'(x),$$

이므로 $k = 2$일 때 조건이 성립한다. 그러면 공식에서

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\sec^2 x \tan^{n+1} x}{n+1} - \frac{2\tan^{n+3} x}{(n+1)(n+3)} + C. \tag{1}$$

을 얻는다.

확인. $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$와 치환(substitution) $t = \tan x$, $\mathrm{d}t = \sec^2 x \,\mathrm{d}x$를 써서 직접 계산하면

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \int (1+t^2)t^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3} + C.$$

이다. (1)의 우변을 $\sec^2 x = 1 + t^2$을 써서 다시 쓰면

$$\frac{(1+t^2)t^{n+1}}{n+1} - \frac{2t^{n+3}}{(n+1)(n+3)} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{(n+3)-2}{(n+1)(n+3)}\,t^{n+3} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3},$$

로 같은 답이 나온다. 따라서 $f = \tan$일 때 결과가 확인된다.

적분.

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} = \tan^4 x \sec^4 x = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

이므로 이것은 (1)에서 $n = 4$인 경우이다. 방금 구한 간단한 꼴을 쓰면

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

이다.

소문항 (ii)

생각해 보기 어떤 f를 택해야 하며, $\sec^2 x$는 어디에서 오는가?

괄호 $(\sec x + \tan x)$가 f의 뻔한 후보이므로 $f(x) = \sec x + \tan x$로 놓아 보자. 그 도함수는

$$f'(x) = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x(\tan x + \sec x) = \sec x\, f(x).$$

이다. 이것이 핵심 사실이다. f를 미분하면 단지 $\sec x$가 곱해질 뿐이다. 따라서

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sec x \tan x\, f(x) + \sec x\, f'(x) = \sec x \tan x\, f + \sec^2 x\, f \\ &= \sec x\, f\,(\tan x + \sec x) = \sec x\, f^2, \end{aligned}$$

이고, $f\,f' = f \cdot \sec x\, f = \sec x\, f^2$이기도 하므로 $f'' = ff'$, 즉 $k = 1$이다.

또 $[f'(x)]^2 = \sec^2 x\,[f(x)]^2$이므로

$$\sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6 = \sec^2 x\, f^2 \cdot f^4 = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

이고, 이는 일반적인 결과에서 $n = 4, k = 1$인 경우이다.

$$\begin{aligned}\int \sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^5}{5} - \frac{f^7}{35} + C = \frac{\sec x\, f^6}{5} - \frac{f^7}{35} + C \\ &= \frac{f^6}{35}(7\sec x - (\sec x + \tan x)) + C \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^6\,(6\sec x - \tan x)}{35} + C.\end{aligned}$$

검산

- (i)의 답을 미분하면 $\sec^2 x \tan^4 x + \sec^2 x \tan^6 x = \sec^2 x \tan^4 x(1 + \tan^2 x) = \tan^4 x \sec^4 x$이다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_{-0.7}^{1.1} \sin^4 x/\cos^8 x\,\mathrm{d}x \approx 22.12954$로 $\left[\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x\right]_{-0.7}^{1.1}$과 일치하고, $\int_{-1}^{0.9} \sec^2 x(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x \approx 133.68566$으로 (ii)의 답과 일치한다.
- 일반 공식은 $f = \tan$이고 n이 1부터 6까지인 모든 경우에 수치 적분(quadrature) 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 부분적분에서 $u = f^n$으로 택하는 것: 그러면 $f^{n-1}[f']^3$이 나와 더 나빠진다. f' 하나를 f^n과 짝지어 정확히 적분되게 해야 한다.
- $\tan x$에 대해 $k = 1$로 두는 것: $f'' = 2\sec^2 x \tan x$이므로 $k = 2$이다.
- (ii)에서 $\sec^2 x$를 $[f']^2/f^2$으로 흡수해야 한다는 점을 잊는 것: 이 때문에 지수가 6에서 $n = 4$로 내려간다.

STEP 너머

조건 $f'' = kff'$은 그 자체로 미분방정식(differential equation)이다. 한 번 적분하면 $f' = \frac{1}{2}kf^2 + c$가 되는데, 이는 1계 변수분리형 방정식(separable equation)이고 그 해에는 $\tan(k = 2, c = 1)$와 $\sec x + \tan x (k = 1, c = \frac{1}{2})$가 포함된다. 함수가 어떤 상미분방정

식(ODE)을 만족하기 때문에 피적분함수를 다룰 수 있게 된다는 것을 알아차리는 일은 대학 1학년 과정의 특수함수와 점화적분 공식(reduction formulae)에서 거듭 등장하는 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이와 같은 변수분리형 방정식과 자율 방정식(autonomous equation)을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.