풀이

STEP II 2011, 문제 5

순수수학 • 벡터와 반사

> **STEP II 2011, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q5

핵심 아이디어

원점을 지나는 직선에 대하여 점을 대칭이동(reflection)하려면, 그 점의 위치벡터를 직선 방향 성분과 직선에 수직인 성분으로 나누면 된다. 대칭이동은 앞의 성분은 그대로 두고 뒤의 성분은 방향을 뒤집는다. $\mathbf{a}$ 방향의 $\mathbf{b}$의 성분은 익숙한 정사영(projection) $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$이고, 나머지는 모두 내적(dot product)을 이용한 계산 정리일 뿐이다. 세 점이 한 직선 위에 있음(collinearity)을 다룰 때는, 한 점이 직선 AB 위에 있을 필요충분조건이 그 위치벡터가 $s+t=1$인 $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ 꼴이라는 것임을 기억하자.

풀이

O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로, 풀이 전체에서 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다. 특히 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\neq 0$이고 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\neq 0$이므로 이들로 나눌 수 있다. $\theta=\angle AOB$라 하자.

대칭점 C

B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 P라 하자. P의 위치벡터는 어떤 실수배 $k\mathbf{a}$이고, $\mathbf{b}-k\mathbf{a}$는 $\mathbf{a}$에 수직이다.

$$(\mathbf{b}-k\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

직선 OA에 대한 대칭이동은 P를 고정하고, B를 반대편에 있는 점 C로 보내는데, 이때 P는 BC의 중점이다. 따라서 $\mathbf{c}=2\overrightarrow{OP}-\mathbf{b}$, 즉

$$\mathbf{c}=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}-\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}-\mathbf{b},\qquad \lambda=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}},$$

이므로 증명하려던 식을 얻는다.

대칭점 D

직선 OA 대신 직선 OB에 대하여 같은 논증을 적용하면

$$\mathbf{d} = \frac{2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\,\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

이다. 이제 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$이므로

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 2\right)\mathbf{b} - (\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1\right)\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}.\end{aligned}$$

이다. 이것은 $\mathbf{d} = \mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$이고, 여기서

$$\mu = \frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1 = \frac{4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})} - 1 = 4\cos^2\theta - 1,$$

이다. 마지막 단계에서는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$를 이용하였다. 아래에서 필요한 것은 $4\cos^2\theta - 1$ 꼴이다.

A, B, D가 한 직선 위에 있는 경우

점 D가 직선 AB 위에 있을 필요충분조건은 어떤 스칼라 t에 대하여 $\mathbf{d} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$인 것이다. 한편 $\mathbf{d} = -\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$이기도 하다.

? **생각해 보기** 왜 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 계수를 비교할 수 있는가?

$\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하지 않기 때문이다. $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = s'\mathbf{a} + t'\mathbf{b}$이면 $(s-s')\mathbf{a} = (t'-t)\mathbf{b}$이고, 두 괄호가 모두 0이 아니라면 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하게 된다. O, A, B가 한 직선 위에 있지 않다는 조건은 바로 여기에서 쓰인다.

따라서 $-\lambda = 1 - t$이고 $\mu = t$이다. t를 소거하면, A, B, D가 한 직선 위에 있을 필요충분조건은

$$\mu = \lambda + 1.$$

이다.

$\lambda = -\frac{1}{2}$인 경우

이제 세 점이 한 직선 위에 있다는 조건에서 $\mu = \frac{1}{2}$이므로 $4\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}$, 즉 $\cos^2\theta = \frac{3}{8}$이다. $\lambda < 0$이므로 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$이고, 따라서 $\cos\theta < 0$이며

$$\cos\angle AOB = -\sqrt{\tfrac{3}{8}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

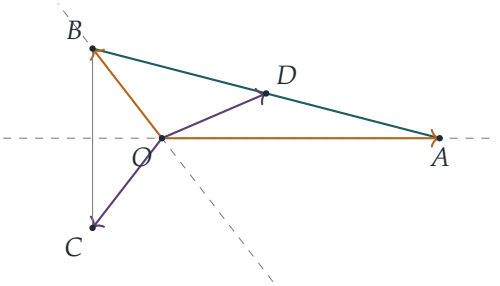
이다. 그러면

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

이므로 D**는** AB**의 중점이다**. 도형의 모양에 대해서도 더 말할 수 있다. $\lambda = \dfrac{2|\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{a}|} = -\frac{1}{2}$로부터

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = -4\cos\theta = \sqrt{6},$$

이므로 $OA = \sqrt{6}\,OB$이고, 각 AOB는 둔각(약 127.8°)이다. 또한 대칭이동은 O로부터의 거리를 보존하므로 $OD = OC = OB$이다. 즉 AB의 중점은 O로부터 B와 정확히 같은 거리에 있다.



검산

- 먼저 OA에 대하여, 다음으로 OB에 대하여 두 번 대칭이동하면 O를 중심으로 2θ만큼 회전(rotation)한 것이 된다. 따라서 D는 B를 2θ만큼 회전한 점이어야 하고, $\cos\angle BOD = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$이어야 한다. 마지막 경우에 이 값은 $2\cdot\frac{3}{8} - 1 = -\frac{1}{4}$이다. 직접 계산하면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{4}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$를 이용하여 $\mathbf{b}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)|\mathbf{b}|^2 = -\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2$이므로 일치한다.
- $\theta = 90^\circ$이면 $\lambda = 0$이고, C는 $-\mathbf{b}$, D도 다시 $-\mathbf{b}$이다. 공식에서도 $\mu = 4\cdot 0 - 1 = -1$이 나오므로 맞다.
- 수치로 확인하면, $\mathbf{a} = (\sqrt{6}, 0)$, $\mathbf{b} = (-0.6124,\ 0.7906)$일 때 두 번 대칭이동하여 $\mathbf{d} = (0.9186,\ 0.3953)$을 얻는데, 이는 AB의 중점이고 $|\mathbf{d}| = 1 = |\mathbf{b}|$이다.

흔한 실수

- 대칭이동을 $\mathbf{b} - 2\times$(정사영)으로 쓰는 것. 이것은 OA에 **수직인** 직선에 대한 대칭이동이다. 고정되어야 하는 $\mathbf{b} = \mathbf{a}$를 대입해 확인해 보자.
- $\cos\theta = +\sqrt{6}/4$로 잡는 것. λ의 부호가 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$의 부호를 결정한다.
- $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 일차독립(independent)이라는 말 없이 계수를 비교하는 것.

STEP 너머

사상 $\mathbf{x} \mapsto \frac{2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} - \mathbf{x}$는 선형사상(linear map)이고, 그 행렬은 행렬식(determinant)이 -1인 직교행렬(orthogonal matrix)의 대표적인 대학 1학년 예시이다. 두 대칭이동을 합성하면 두 거울 사이 각의 두 배만큼 회전하는 회전이 된다. 이것이 등거리변환(isometry)과 정다각형의 대칭군처럼 대칭이동으로 생성되는 군(group)에 대한 연구의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 사영과 대칭이동 행렬을 잘 다루고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.