풀이

STEP II 2011, 문제 4

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2011, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q4

핵심 아이디어

$\cos\theta$를 관련된 각의 사인(또는 코사인)으로 나타내면 "$\cos\theta = \sin 4\theta$"는 두 코사인 사이의 방정식이 되고, 이것은 정확히 풀 수 있다. $\sin 4\theta$를 $\sin\theta$의 거듭제곱으로 전개하면 그 각들의 사인 값을 근으로 갖는 삼차방정식(cubic)을 얻으며, 바로 이 과정에서 $\sin 18^\circ$와 같은 무리수(surd)가 나타난다. 소문항 (ii)는 $\sin^2 x$에 대한 이차방정식(quadratic)이고, 소문항 (iii)은 사인의 제곱이 $\frac{1}{4}$인 각을 알아차리기만 하면 모습만 바꾼 소문항 (ii)이다.

풀이

소문항 (i)

같은 종류끼리 비교하기 위해 $\sin 4\theta = \cos(90^\circ - 4\theta)$로 쓴다. 두 각의 코사인 값이 같을 필요충분조건은 360°의 배수 차이를 무시할 때 두 각이 같거나 부호가 반대인 것이므로

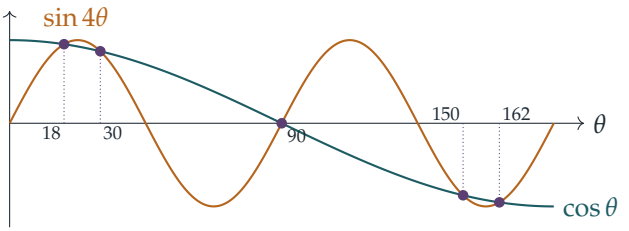
$$\cos\theta = \cos(90^\circ - 4\theta) \iff \theta = \pm(90^\circ - 4\theta) + 360^\circ k \quad \text{단, 정수} k.$$

- $+$ 부호인 경우: $5\theta = 90^\circ + 360^\circ k$이므로 $\theta = 18^\circ + 72^\circ k$이다. $0^\circ < \theta < 180^\circ$에서 이로부터 $\theta = 18^\circ,\ 90^\circ,\ 162^\circ$를 얻는다.
- $-$ 부호인 경우: $3\theta = 90^\circ - 360^\circ k$이므로 $\theta = 30^\circ - 120^\circ k$이고, 따라서 $\theta = 30^\circ,\ 150^\circ$이다.

따라서 해는

$$\theta = 18^\circ,\ 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 162^\circ.$$

아래 그래프를 보면 교점이 정확히 다섯 개임을 확인할 수 있다.



이제 "이를 이용하여" 부분을 보자. $s = \sin\theta$라 하자. 배각 공식(double-angle formulae)을 두 번 쓰면

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta),$$

이므로 방정식 $\cos\theta = \sin 4\theta$는 다음과 같이 된다.

$$\cos\theta\big(1 - 4s(1 - 2s^2)\big) = 0.$$

? **생각해 보기** 왜 $\cos\theta$를 약분할 수 있는가?

다섯 개의 해 가운데 $\cos\theta = 0$인 것은 $\theta = 90°$뿐이다. 나머지 네 해 $18°, 30°, 150°, 162°$는 모두 $\cos\theta \neq 0$이므로, 이들에 대해서는 $\cos\theta$로 나누어

$$8s^3 - 4s + 1 = 0.$$

을 얻는다. $s = \sin 30° = \frac{1}{2}$가 한 근임을 알고 있으므로 인수분해(factorising)하면

$$8s^3 - 4s + 1 = (2s - 1)(4s^2 + 2s - 1).$$

이제 $\sin 18°$는 이 삼차방정식의 근이고, 사인은 $[0°, 90°]$에서 증가하므로 $0 < \sin 18° < \sin 30° = \frac{1}{2}$이다. 따라서 $\sin 18° \neq \frac{1}{2}$이고, 이 값은 $4s^2 + 2s - 1 = 0$의 근이어야 한다. 이 방정식의 근은

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

이 가운데 양수인 것은 $+$ 근뿐이므로

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

$s = \sin x$라 하자. $\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x = 4s^2(1 - s^2)$이므로 방정식은 s에만 의존한다.

$$4s^2 + 1 = 16s^2(1 - s^2) \iff 16s^4 - 12s^2 + 1 = 0.$$

이것은 s^2에 대한 이차방정식이다.

$$s^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144-64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

제곱근을 구하기 위해 다음에 주목한다.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

s^2의 두 값은 모두 0과 1 사이에 있으므로 네 개의 제곱근 각각이 실제로 $\sin x$의 값이 될 수 있고, 위의 모든 단계가 역으로도 성립하므로 각각 원래 방정식을 만족한다. 가능한 값은

$$\sin x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}.$$

소문항 (i)에 의해 $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \sin 18^\circ$이고, $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \sin 54^\circ$이다(이 값은 $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$이며, 계산해 보면 같은 값이 됨을 확인할 수 있다).

소문항 (iii)

소문항 (ii)의 방정식을 4로 나누면

$$\sin^2 x + \tfrac{1}{4} = \sin^2 2x.$$

이것을 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha = \sin^2 6\alpha$와 비교하자. $x = 3\alpha$로 놓으면 자동으로 $2x = 6\alpha$이고, 다음 조건이 성립하면 두 방정식이 일치한다.

$$\sin^2 5\alpha = \tfrac{1}{4} \qquad \text{그리고} \qquad \sin 3\alpha\text{는 소문항 (ii)의 네 값 가운데 하나이다.}$$

? 생각해 보기 $\sin 3\alpha$가 그 값들 가운데 하나이기만 하면 충분한가?

그렇다. 소문항 (ii)에서 보았듯이 방정식 $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin^2 2x$는 x에 오직 $s = \sin x$를 통해서만 의존하며, s의 네 값은 이 방정식을 만족한다. 따라서 사인 값이 그 가운데 하나인 x는 모두 해가 된다.

$\alpha = 6^\circ$로 잡자. 그러면 $5\alpha = 30^\circ$이므로 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$이고, $3\alpha = 18^\circ$이므로 $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$로 우리가 구한 값 가운데 하나이다. 따라서

$$\sin^2 18^\circ + \sin^2 30^\circ = \sin^2 36^\circ,$$

이고 $\alpha = 6^\circ$는 해이다.

$\alpha = 42^\circ$로 잡자. 그러면 $5\alpha = 210^\circ$이므로 $\sin 5\alpha = -\frac{1}{2}$이고 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$이다. 또 $3\alpha = 126^\circ$이므로 $\sin 3\alpha = \sin 54^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$로 역시 우리가 구한 값 가운데 하나이다. 따라서 $\alpha = 42^\circ$는 해이다.

그러므로 조건에 맞는 두 값은 $\alpha = 6°$와 $\alpha = 42°$이다.

같은 방법으로 $\alpha = 66°$($5\alpha = 330°$, $\sin 3\alpha = \sin 198° = -\sin 18°$)와 $\alpha = 78°$($5\alpha = 390°$, $\sin 3\alpha = \sin 234° = -\sin 54°$)도 얻는다. 범위 안에서 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$인 나머지 각은 $\alpha = 30°$인데, $\sin 90° = 1$은 우리가 구한 값이 아니므로 이것은 해가 아니다. (실제로 $1 + \frac{1}{4} \neq \sin^2 180° = 0$이다.)

검산

- $\sin 18° \approx 0.30902$이고 $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.30902$이다.
- $\alpha = 6°$일 때: $\sin^2 18° + \sin^2 30° \approx 0.09549 + 0.25 = 0.34549$이고, $\sin^2 36° \approx 0.34549$이다.
- $(0°, 90°)$에서 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha - \sin^2 6\alpha$를 수치적으로 조사하면 영점은 정확히 $6°, 42°, 45°, 66°, 78°$이다. 추가로 나타난 $45°$는 소문항 (ii)에서 나온 것이 아니다. 이때는 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이다.

흔한 실수

- $\cos A = \cos B$의 두 번째 해의 족(즉 $A = -B + 360°k$)을 잊어서 소문항 (i)에서 $30°$와 $150°$를 빠뜨린다.
- 아무 언급 없이 $\cos\theta$를 약분한다. 여기서는 괜찮지만, 그것은 $\cos\theta = 0$인 해가 $18°$가 아니라 $90°$이기 때문일 뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 $\sin x$의 양수 값만 제시한다. 네 값 모두 가능하다.

STEP 너머

$\sin 18°$의 정확한 값은 $18°$가 직각의 5분의 1이라는 사실에서 나오며, 그래서 이 값은 정오각형(regular pentagon) 및 황금비(golden ratio)와 연결된다: $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}\varphi$. 더 일반적으로, $\cos(360°/n)$을 제곱근만으로 나타낼 수 있을 필요충분조건은 정n각형을 자와 컴퍼스로 작도(construct with ruler and compasses)할 수 있는 것이며, 가우스(Gauss)는 이것이 n을 나누는 페르마 소수(Fermat primes)에 달려 있음을 보였다. 이는 체론(field theory)과 갈루아 이론(Galois theory)의 대표적인 첫 응용이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 이에 필요한 대수를 차근차근 쌓아 올리고, Needham의 *Visual Complex Analysis*는 단위근(roots of unity)과 다각형이 왜 함께 다루어지는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.