풀이

STEP II 2011, 문제 3

순수수학 • 단조성을 이용한 부등식

> **STEP II 2011, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q3

핵심 아이디어

여기 나오는 모든 부등식은 하나의 원리에서 나온다. 어떤 함수가 영에서 출발하고 그 도함수(derivative)가 음이 아니면, 그 함수는 계속 음이 아니다. 마지막 두 결과에는 한 가지 변형이 더해진다. 어떤 함수가 증가함수(increasing function)임을 알고 나면, 대소 관계를 이미 알고 있는 두 입력값(예를 들어 $x \leq \arcsin x$)을 넣어 출력값 사이의 부등식을 읽어 낼 수 있다. 어떤 두 입력값을 비교할지 알아차리는 것이 요령의 전부이다.

풀이

소문항 (i)(a)

$x\cos x$에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$에서는 $x \geq 0$이고 $\sin x \geq 0$이므로 $f'(x) \geq 0$이고, 따라서 f는 이 구간에서 증가한다.

그러므로 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$이면 $x \geq 0$이므로 $f(x) \geq f(0) = \sin 0 - 0 = 0$이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (i)(b)

$0 \leq x < 1$에서 $h(x) = \arcsin x - x$라 하자. 그러면 주어진 사실을 이용하여

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

을 얻는다. 따라서 h는 증가하고, $h(x) \geq h(0) = 0$이다. 즉 $0 \leq x < 1$에서 $\arcsin x \geq x$이다.

(주어진 사실은 단지 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$이라는 것이며, $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$이므로 참이다.)

소문항 (i)(c)

$g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$라 하자. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 몫의 미분법(quotient rule)을 쓰면

$$g'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}.$$

(a)에 의해 이 구간에서 $f(x) \geq 0$이고 $\sin^2 x > 0$이므로 $g'(x) \geq 0$이며, g는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가한다.

> ? **생각해 보기** g가 증가한다는 사실이 $\arcsin x$를 포함한 부등식에 어떻게 도움이 되는가?

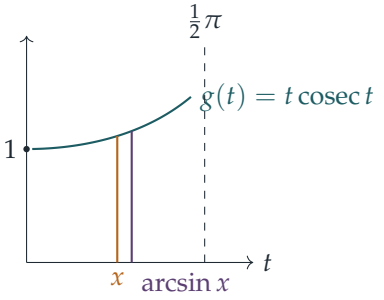
목표를 살펴보자: $\dfrac{\arcsin x}{x} \geq \dfrac{x}{\sin x}$. 우변은 $g(x)$이다. 좌변도 g의 함숫값이다. $y = \arcsin x$이면 $\sin y = x$이므로

$$g(y) = \frac{y}{\sin y} = \frac{\arcsin x}{x}.$$

따라서 $g(\arcsin x) \geq g(x)$를 보이면 되는데, g가 증가하므로 이는 (b)의 $\arcsin x \geq x$로부터 나온다.

마무리하기 위해 $0 < x < 1$이라 하고 $y = \arcsin x$라 하자. 그러면 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$이다. 또 $0 < x < 1 < \frac{1}{2}\pi$이므로 x와 y 모두 g가 증가하는 구간에 있다. (b)에 의해 $y \geq x$이므로 $g(y) \geq g(x)$이다:

$$(\arcsin x)\, x^{-1} = \frac{y}{\sin y} \geq \frac{x}{\sin x} = x \operatorname{cosec} x \qquad (0 < x < 1).$$



그림은 $x = 0.8$일 때의 논증을 보여 준다. 입력값 $\arcsin x$가 x보다 오른쪽에 있으므로, 증가하는 곡선은 그곳에서 더 높다.

소문항 (ii)

(i)의 방식을 그대로 따른다. 먼저 (b)에 해당하는 결과이다. $x \geq 0$에서 $m(x) = x - \arctan x$라 하자. 주어진 사실에 의해 $m'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) \geq 0$이므로 $m(x) \geq m(0) = 0$이다. 따라서

$$\arctan x \leq x \qquad (x \geq 0).$$

다음은 (c)에 해당하는 결과이다. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $k(x) = x^{-1}\tan x$라 하자. 분자와 분모에 $\cos^2 x$(양수)를 곱하고 다시 2를 곱하면

$$k'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x},$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** 왜 $2x - \sin 2x \geq 0$인가?

이것은 $t \geq 0$일 때 성립하는 익숙한 부등식 $\sin t \leq t$에서 $t = 2x$로 둔 것이다. 이것도 다른 모든 것과 같은 방식으로 증명할 수 있다. $p(t) = t - \sin t$는 $p'(t) = 1 - \cos t \geq 0$이고 $p(0) = 0$이므로, $t \geq 0$에서 $p(t) \geq 0$이다.

따라서 $k'(x)$의 분자(numerator)는 음이 아니고 분모(denominator)는 양수이므로 $k'(x) \geq 0$이다. 그러므로 k는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가한다.

이제 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$라 하고 $y = \arctan x$라 하자. 그러면 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$이므로 x와 y 모두 k가 증가하는 구간에 있고, $\tan y = x$이다. $y \leq x$이므로 $k(y) \leq k(x)$이다:

$$\frac{x}{\arctan x} = \frac{\tan y}{y} \leq \frac{\tan x}{x}.$$

x와 $\arctan x$는 모두 양수이므로, 양변에 $x\arctan x$를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다:

$$(\tan x)(\arctan x) \geq x^2 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi),$$

이것이 보이려던 것이다.

검산

- (c)에서 $x = \frac{1}{2}$일 때: $\arcsin(\frac{1}{2})/\frac{1}{2} = \pi/3 \approx 1.0472$이고, $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{2} \approx 1.0429$이다. 부등식이 아슬아슬하게 성립하는데, 이는 예상한 대로이다. $x \to 0$일 때 양변 모두 1로 수렴(converge)하기 때문이다.
- (ii)에서 $x = 1$일 때: $\tan 1 \cdot \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi\tan 1 \approx 1.2232 \geq 1$.

- x가 작을 때 $\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3$이고 $\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3$이므로, 곱은 $x^2 + O(x^6)$이다. 즉 (ii)의 부등식은 0 근처에서 매우 빠듯하다. 무작위로 고른 20,000개의 점에서 수치적으로 확인한 결과, 위의 모든 부등식과 모든 도함수 공식이 맞았다.

흔한 실수

- (c)에서 g를 엉뚱한 두 점에서 비교하거나, $\arcsin x$가 g의 증가가 알려진 구간 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 안에 있는지 확인하지 않는 것.
- (ii)에서는 입력값 사이의 부등식이 반대 방향($\arctan x \leq x$)이므로 출력값 사이의 부등식도 반대 방향이 된다. 이것을 거꾸로 하면 잘못된 부등식을 얻는다.
- 곱하는 수($x \arctan x$ 또는 $\cos^2 x$)가 양수라는 말 없이 부등식의 양변에 곱하는 것.

STEP 너머

풀이 내내 사용한 원리, 즉 도함수가 음이 아니면 함수가 증가한다는 사실은 평균값 정리(mean value theorem)의 결과이며, 이 정리는 해석학(analysis) 첫 강의에서 반드시 증명한다. sin과 arcsin이 서로 역함수(inverse function)일 때 $g(x)$와 $g(\arcsin x)$를 비교하는 요령은, 역함수와 볼록성(convexity)을 공부하며 만나게 될 아이디어들과 가까운 친척이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 그 결과들을 꼼꼼하고 읽기 쉽게 증명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.