풀이

STEP II 2011, 문제 2

순수수학 • 디오판토스 방정식

> **STEP II 2011, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q2

핵심 아이디어

$x^3 + y^3$이 보이면 언제나 인수분해(factorise)한다: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. $x+y$의 값이 정해지면((i)에서는 k, (ii)에서는 z^2), 인수 $x+y$가 kz^3의 일부와 약분되어 이차 조건만 남는다. 그 이차식을 완전제곱식으로 만들면(completing the square) "어떤 수 $= 3\times$ 완전제곱수(perfect square)" 꼴이 되고, 범위를 제한하면(bounds) 확인해야 할 세제곱수(cube)가 몇 개밖에 남지 않는다. 문제에서 먼저 10^3까지의 세제곱수를 묻는 것은 이 때문이다.

참고로: $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000$.

풀이

소문항 (i)

$x + y = k$이므로

$$kz^3 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = k(x^2 - xy + y^2),$$

이고 $k > 0$이므로 $z^3 = x^2 - xy + y^2$이다. $y = k - x$를 대입하면

$$\begin{aligned} z^3 &= x^2 - x(k-x) + (k-x)^2 \\ &= x^2 - kx + x^2 + k^2 - 2kx + x^2 \\ &= k^2 - 3kx + 3x^2, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

완전제곱수. 4를 곱하고 완전제곱식을 만들면

$$4z^3 - k^2 = 12x^2 - 12kx + 3k^2 = 3(4x^2 - 4kx + k^2) = 3(k-2x)^2.$$

따라서 $\dfrac{4z^3 - k^2}{3} = (k-2x)^2$은 정수 $k-2x$의 제곱이다.

범위. 위 식에서 $4z^3 = k^2 + 3(k-2x)^2 \geq k^2$이므로 $\frac{1}{4}k^2 \leq z^3$이다. 위쪽 범위를 구하기 위해 $3kx - 3x^2 = 3x(k-x) = 3xy$임에 주목하면

$$z^3 = k^2 - 3xy < k^2,$$

이다. x와 y가 양수이기 때문이다. 따라서 $\frac{1}{4}k^2 \leq z^3 < k^2$이다.

$k = 20$인 경우. $x + y = 20$인 해를 찾는다. 범위에서 $100 \leq z^3 < 400$이므로, 세제곱수 목록에서 $z^3 \in \{125, 216, 343\}$이다. 이제 $(4z^3 - 400)/3$이 완전제곱수인지 확인한다.

- $z = 5$: $(500 - 400)/3 = 100/3$, 정수가 아니다.
- $z = 6$: $(864 - 400)/3 = 464/3$, 정수가 아니다.
- $z = 7$: $(1372 - 400)/3 = 324 = 18^2$. ✓

따라서 $k = 20$일 때 $(k-2x)^2 = 18^2$이다. $x < y$이면 $2x < x + y = k$이므로 $k - 2x > 0$이고, 따라서 $k - 2x = 18$이며 $x = 1$, $y = 19$를 얻는다. 검산: $1^3 + 19^3 = 1 + 6859 = 6860 = 20 \times 343 = 20 \times 7^3$. 그러므로

$$x = 1, \quad y = 19, \quad z = 7$$

은 $k = 20$일 때 $(*)$의 해이다.

소문항 (ii)

이제 $x + y = z^2$이라 하자. 그러면

$$kz^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = z^2(x^2 - xy + y^2),$$

이고, z^2으로 나누면($z > 0$이므로 가능하다) $x^2 - xy + y^2 = kz$를 얻는다.

? **생각해 보기** 여기서도 같은 "완전제곱수" 기법을 쓰려면 어떻게 해야 할까?

항등식(identity) $4(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2 + 3(x-y)^2$을 이용한다. 이것은 (i)에서 얻은 결과를 모양만 바꾼 것이다(우변을 전개하여 확인해 보라). $x + y = z^2$, $k = 19$를 대입하면

$$76z = z^4 + 3(y-x)^2, \qquad \text{즉} \qquad 3(y-x)^2 = z\,(76 - z^3).$$

$y > x$이므로 좌변은 양수이고, 따라서 $z^3 < 76$, 즉 $z \in \{1, 2, 3, 4\}$이다. $z(76 - z^3)/3$이 완전제곱수여야 한다.

- $z = 1$: $75/3 = 25 = 5^2$이므로 $y - x = 5$이다. 그러나 $x + y = 1$이므로 양의 정수로는 불가능하다.
- $z = 2$: $2 \times 68/3 = 136/3$, 정수가 아니다.
- $z = 3$: $3 \times 49/3 = 49 = 7^2$이므로 $y - x = 7$, $x + y = 9$이고, $x = 1$, $y = 8$을 얻는다.
- $z = 4$: $4 \times 12/3 = 16 = 4^2$이므로 $y - x = 4$, $x + y = 16$이고, $x = 6$, $y = 10$을 얻는다.

검산: $1^3 + 8^3 = 513 = 19 \times 27 = 19 \times 3^3$이고, $6^3 + 10^3 = 1216 = 19 \times 64 = 19 \times 4^3$이다. 따라서 $k = 19$일 때 $(*)$의 두 해는

$$(x, y, z) = (1, 8, 3) \quad \text{와} \quad (x, y, z) = (6, 10, 4).$$

이다. (사실 위 논증은 $x + y = z^2$인 해가 이 둘뿐임을 보여 준다.)

검산

- (i)의 항등식을 작은 경우로 확인한다: $k = 5$, $x = 2$, $y = 3$이면 $x^3 + y^3 = 35 = 5 \times 7$이고, $k^2 - 3kx + 3x^2 = 25 - 30 + 12 = 7$이다. ✓
- 위에서 한 것처럼 모든 답을 $(*)$에 다시 대입한다: $6860 = 20 \times 343$, $513 = 19 \times 27$, $1216 = 19 \times 64$.
- $x + y = 20$인 모든 $x < y$, 그리고 $k = 19$일 때 $x + y = z^2$인 모든 $x < y$에 대해 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 해들만 나오고 다른 해는 없다.

흔한 실수

- 부호를 잊는 실수: $(k - 2x)^2 = 18^2$에서 $k - 2x = -18$도 가능하지만, 이 경우 $x = 19 > y$가 되어 조건 $x < y$에 의해 제외된다.
- (ii)에서 $z = 1$을 해로 남겨 두는 실수: $y - x = 5$ 자체는 괜찮지만, $x + y = 1$과 동시에 성립할 수 없다.

STEP 너머

$x^3 + y^3 = kz^3$ 같은 방정식은 어떤 정수 k가 두 유리수의 세제곱의 합으로 나타나는지를 묻는다. 이 질문은 곧바로 타원곡선(elliptic curve)으로 이어지며, 아직도 완전히 해결되지 않았다. 유명한 택시 수(taxicab number) $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$도 같은 세계에 속한다. 여기서 쓴 기법들(인수분해, 완전제곱식 만들기, 그리고 범위를 제한하여 유한한 탐색으로

줄이기)은 초등 정수론(elementary number theory)의 기본 중의 기본이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 다음 단계로 읽기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.