풀이

STEP II 2011, 문제 12

확률과 통계 • 게임의 등비급수

STEP II 2011, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s2-q12

핵심 아이디어

각 게임은 길어야 세 포인트이므로, 게임이 진행될 수 있는 모든 경우(포인트 순서는 여덟 가지뿐이다)를 나열하여 "Xavier 승리", "Younis 승리", "승자 없음, 게임을 다시 한다"로 분류할 수 있다. 새 게임은 매번 처음부터 다시 시작하므로 경기 전체는 등비적 과정(geometric process)이 된다. 즉 Younis가 경기에서 이길 확률(probability)은 그가 한 게임을 이길 확률을 한 게임에서 승부가 날 확률로 나눈 값이다.

풀이

각 게임을 포인트를 딴 사람의 문자열로 나타내자. 예를 들어 XYY는 Xavier가 첫 번째 포인트를, Younis가 두 번째와 세 번째 포인트를 땄다는 뜻이다. 첫 번째 포인트는 확률 p로 X가 딴다. 그 이후로 각 포인트는 확률 p로 직전 포인트를 딴 사람과 **같은** 선수가 따고, 확률 $1-p$로 **바뀐다**.

같은 선수가 두 포인트를 연속으로 따는 순간 게임의 승부가 나므로, 가능한 게임은 다음과 같다.

순서	확률	결과
XX	$p \cdot p$	Xavier 승리
YXX	$(1-p)(1-p)p$	Xavier 승리
YY	$(1-p)p$	Younis 승리
XYY	$p(1-p)p$	Younis 승리
XYX	$p(1-p)(1-p)$	게임 다시
YXY	$(1-p)(1-p)(1-p)$	게임 다시

(게임이 XX나 YY에 이르면 세 번째 포인트는 필요 없으며, 그 포인트를 치른다고 생각하든 아니든 차이가 없다.) 승부가 나지 않는 게임은 정확히 포인트가 번갈아 나오는 경우, 즉 이후의 두 포인트가 모두 "바뀌는" 경우이다.

소문항 (i)

주어진 한 게임에서 Younis가 이기는 사건을 A, 게임의 승부가 나지 않는 사건을 C라 하자. 표로부터

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= (1-p)p + p^2(1-p) = p(1-p)(1+p) = p(1-p^2),\\ \mathrm{P}(C) &= p(1-p)^2 + (1-p)^3 = (1-p)^2(p+(1-p)) = (1-p)^2.\end{aligned}$$

각 게임은 같은 규칙으로 독립적(independent)으로 치러지므로, Younis가 경기에서 이기는 것은 어떤 $n \geq 1$에 대하여 처음 $n-1$번의 게임에서 승부가 나지 않고 n번째 게임에서 그가 이기는 경우이다. 따라서

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(C)^{n-1}\,\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(C)},$$

이고, $p \neq 0$이면 $\mathrm{P}(C) = (1-p)^2 < 1$이므로 이 등비급수(geometric series)는 수렴한다. (같은 이야기를 다르게 하면, 첫 게임에서 승부가 나지 않으면 처음 상태로 되돌아가므로 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)\,w$이다.) 이제 $1-(1-p)^2 = 2p-p^2 = p(2-p)$이므로

$$w = \frac{p(1-p^2)}{p(2-p)} = \frac{1-p^2}{2-p},$$

이며, 여기서 p를 약분할 때 $p \neq 0$을 사용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

$\frac{1}{2}$과 비교하기. 다음이 성립한다.

$$w - \tfrac{1}{2} = \frac{2(1-p^2)-(2-p)}{2(2-p)} = \frac{p-2p^2}{2(2-p)} = \frac{p(1-2p)}{2(2-p)}.$$

$0 < p \leq 1$이면 인수 p와 $2-p$는 양수이므로 $w - \frac{1}{2}$의 부호는 $1-2p$의 부호와 같다. 따라서 $0 < p < \frac{1}{2}$일 때 $w > \frac{1}{2}$이고, $p > \frac{1}{2}$일 때 $w < \frac{1}{2}$이다 (그리고 대칭성(symmetry)에서 예상되듯이 $p = \frac{1}{2}$에서 $w = \frac{1}{2}$이다).

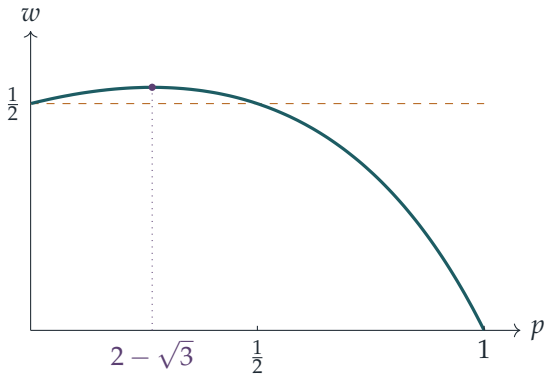
? **생각해 보기** p를 낮추면 Younis가 첫 번째 포인트를 딸 가능성이 커진다. 이것이 언제나 그에게 유리할까?

w는 p에 대하여 감소하는가? 그렇지 않다. 몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{-2p(2-p)+(1-p^2)}{(2-p)^2} = \frac{p^2-4p+1}{(2-p)^2}.$$

분자의 근은 $p = 2 \pm \sqrt{3}$이고, 이 중 $[0,1]$에 속하는 것은 $2 - \sqrt{3} \approx 0.268$뿐이다. 따라서 $0 < p < 2 - \sqrt{3}$에서 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p > 0$이고, $2 - \sqrt{3} < p \leq 1$에서 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p < 0$이다. 구간 $0 < p < 2 - \sqrt{3}$에서는 p를 줄이면 오히려 w가 **줄어든다**. 예를 들어 $w(0.2) = \frac{8}{15} \approx 0.533$이지만 $w(0.1) = \frac{99}{190} \approx 0.521$이다.

그 이유는 p가 두 가지 역할을 하기 때문이다. p가 작으면 Younis가 첫 번째 포인트를 따지만, 동시에 연속으로 이기기도 어려워진다. 한 포인트를 딴 사람이 계속 이길 확률이 p에 불과하기 때문이다. p가 아주 작으면 포인트가 번갈아 나오는 경향이 있어서, 첫 번째 포인트의 이점이 사라져 버린다. 최댓값은 $w(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.536$이고, $p \to 0$일 때 $w \to \frac{1}{2}$이다.



소문항 (ii)

$p = \frac{2}{3}$이면

$$w = \frac{1 - \frac{4}{9}}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{5/9}{4/3} = \frac{5}{12}.$$

$\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9} < 1$이므로 경기는 확률 1로 끝나고, 따라서 Xavier가 경기에서 이길 확률은 $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$이다. Xavier의 기대 이득(expected gain)은

$$\tfrac{7}{12} \times 1 - \tfrac{5}{12} \times k,$$

이고, 게임이 공정하려면 이 값이 0이어야 하므로 다음을 얻는다.

$$k = \frac{7}{5}.$$

따라서 Younis가 이기면 Xavier는 Younis에게 £1.40을 지불해야 한다.

소문항 (iii)

$p = 0$이면 모든 게임에서 첫 번째 포인트는 반드시 Younis가 따고, 이후의 모든 포인트는 반드시 직전 포인트를 **잃은** 선수가 딴다. 따라서 모든 게임은 확률 1로 YXY로 진행된다. 누

구도 두 포인트를 연속으로 따지 못하므로 경기는 결코 끝나지 않는다. 즉 어느 선수도 이기지 못한다.

이것이 소문항 (i)에서 $p = 0$을 제외한 이유이다. 이때 $\mathrm{P}(A) = 0$이고 $1 - \mathrm{P}(C) = 0$이므로 공식 $w = \mathrm{P}(A)/(1 - \mathrm{P}(C))$는 $0/0$이 된다. $p \to 0$일 때 $\frac{1-p^2}{2-p} \to \frac{1}{2}$이라는 사실은 결국 끝이 나는 근처의 경기들을 설명하는 것일 뿐, $p = 0$인 경우 자체의 확률이 아니다.

검산

- $p = \frac{1}{2}$이면 모든 포인트가 공정한 동전 던지기이므로 w는 $\frac{1}{2}$이어야 한다. 공식은 $\frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$을 준다.
- $p = 1$이면 Xavier가 처음 두 포인트를 반드시 따므로 $w = 0$이다. 공식은 0을 준다.
- 표에 있는 여섯 게임의 확률을 모두 더하면 1이다.
- 여덟 가지 포인트 순서를 모두 정확히 열거한 결과(p는 0.01부터 0.99까지) w가 그대로 재현되었고, $p = \frac{2}{3}$에서 200 000번의 경기를 시뮬레이션한 결과 Younis가 이긴 비율은 41.6%로, $\frac{5}{12} \approx 41.7\%$와 일치하였다.

흔한 실수

- 전이 규칙을 거꾸로 적용하는 것. 확률 p는 Xavier가 아니라 **직전 포인트**를 딴 사람에게 속한다.
- 엉뚱한 곱을 같다고 놓아서 $k = \frac{5}{7}$이라고 답하는 것. 공정하다는 것은 $\mathrm{P}(\text{X 승리}) \times 1 = \mathrm{P}(\text{Y 승리}) \times k$라는 뜻이므로, 이길 가능성이 적은 쪽이 더 큰 상금을 받는다.
- 소문항 (iii)에서 공식에 $p = 0$을 대입하여 각 선수가 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이라고 말하는 것. 실제로는 경기가 결코 끝나지 않는다.

STEP 너머

여기서 포인트들은 **마르코프 연쇄**(Markov chain)를 이룬다. 즉 각 포인트는 바로 앞의 포인트에만 의존한다. 경기를 동일하고 독립적인 게임들로 나누는 것은 **재생**(renewal) 논증의 한 예이며, 방정식 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)w$는 마르코프 연쇄에서 흡수 확률(absorption probability)을 구하는 표준적인 방법인 "첫걸음 분석(first-step analysis)"의 가장 간단한 예이다. 소문항 (iii)은 흡수가 일어나지 않을 때 어떤 일이 생기는지 보여 준다. 연쇄가 영원히 순환하는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 대학 1학년 수준에서 마르코프 연쇄와 이러한 방법들을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.