풀이

STEP II 2011, 문제 11

역학 • 3차원에서의 평형

> **STEP II 2011, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q11

핵심 아이디어

모든 것은 각 줄 방향의 단위벡터(unit vector)를 쓰는 데서 출발한다. 각 단위벡터는 수직 부분과 수평 부분으로 나뉜다. 수직 부분은 줄이 수직선과 이루는 각으로 정해지고, 수평 부분은 O에서 천장에 있는 줄의 끝을 향하며 그 방향이 OA와 이루는 각으로 정해진다. 세 단위벡터를 알고 나면 평형(equilibrium)은 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 각각에 대한 스칼라 방정식 세 개일 뿐이다.

풀이

P를 입자(particle)로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 따라서 각 줄은 줄을 따라 작용하는 힘으로 P를 고정된 끝 쪽으로 당긴다. O를 원점으로 잡고, $\mathbf{j}$는 OA 방향, $\mathbf{k}$는 연직 위쪽 방향으로 잡는다. $\mathbf{i}$는 수평이고 OA에 수직이다.

먼저 삼각비를 구한다. $\tan\theta = \sqrt{2}$이므로 세 변이 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$인 직각삼각형에서

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\tan\phi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$이므로 두 변이 $4, \sqrt{2}$이고 빗변이 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$이다. 따라서

$$\sin\phi = \frac{1}{3}, \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

소문항 (i)

수직선과 각 α를 이루는 줄의 단위벡터(P에서 천장 쪽으로)는 수직 성분(component)이 $\cos\alpha$이고 수평 부분의 길이가 $\sin\alpha$이다.

PB의 경우 $\alpha = 90^\circ - \theta$이므로 수직 성분은 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이고 수평 부분의 길이는 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

수평 부분은 OB 방향을 향하며(O가 P의 바로 위에 있으므로), 이 방향은 $\mathbf{j}$와 각 $90^\circ + \theta$를 이룬다. $\mathbf{j}$와 각 $90^\circ + \theta$를 이루는 수평 단위벡터는 $\pm\sin(90^\circ + \theta)\,\mathbf{i} + \cos(90^\circ + \theta)\,\mathbf{j} = \pm\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}$이다. B가 OA에 대해 $\mathbf{i}$의 음의 방향 쪽에 놓이도록 $\mathbf{i}$의 방향을 정한다. 문제에서 요구하는 형태가 이 선택을 정해 준다. 그러면 PB 방향 단위벡터의 수평 부분은

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j}\right) = -\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}.$$

여기에 수직 성분을 더하면 PB 방향의 단위벡터는

$$-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. (검산: $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = 1$.)

소문항 (ii)

같은 방법으로 나머지 두 줄의 단위벡터를 구한다.

줄 PA: 수직선과 이루는 각은 30°이고, 수평 부분은 $\mathbf{j}$ 방향이다.

$$\mathbf{e}_A = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}.$$

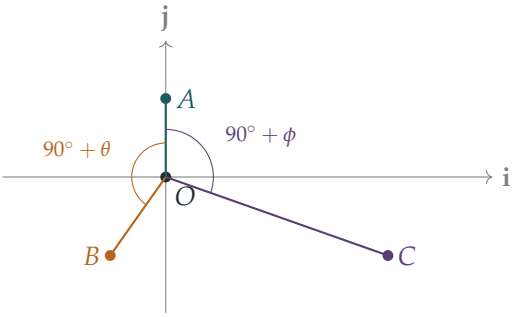
줄 PC: 수직선과 이루는 각이 60°이므로 수직 성분은 $\frac{1}{2}$이고 수평 부분의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 방향 OC는 $\mathbf{j}$와 각 $90^\circ + \phi$를 이루므로 수평 단위벡터는 $\pm\cos\phi\,\mathbf{i} - \sin\phi\,\mathbf{j}$이다.

> **생각해 보기** C는 OA에 대해 B와 같은 쪽에 있는가, 반대쪽에 있는가?

그림은 반대쪽을 보여 주며, 어차피 평형 조건이 이를 요구한다. PA의 장력(tension)은 $\mathbf{i}$ 성분이 없고, PB의 장력은 음의 $\mathbf{i}$ 성분을 가진다. PC도 음의 $\mathbf{i}$ 성분을 가진다면 이들을 상쇄할 힘이 없다. 따라서 부호는 $+$이고,

$$\mathbf{e}_C = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{j}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k} = \tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

아래의 천장 평면도(plan view)($OP = 1$로 잡으면 $OA = \tan 30^\circ$, $OB = \cot\theta$, $OC = \tan 60^\circ$)가 배치를 보여 준다.



따라서 P에 작용하는 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{장력} PA: &\quad T\left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}\right), \\ \text{장력} PB: &\quad U\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}\right), \\ \text{장력} PC: &\quad V\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}\right), \\ \text{무게(weight)}: &\quad -W\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

소문항 (iii)

P는 평형 상태이므로 네 힘의 합은 영벡터이다. 성분별로 나누어 본다.

i:

$$-\tfrac{1}{3}U + \tfrac{\sqrt{6}}{3}V = 0 \quad\Longrightarrow\quad U = \sqrt{6}\,V,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

j:

$$\tfrac{1}{2}T - \tfrac{\sqrt{2}}{3}U - \tfrac{\sqrt{3}}{6}V = 0.$$

$U = \sqrt{6}V$를 대입하고 $\sqrt{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$을 이용하면

$$\tfrac{1}{2}T = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}V + \tfrac{\sqrt{3}}{6}V = \tfrac{5\sqrt{3}}{6}V \quad\Longrightarrow\quad T = \tfrac{5\sqrt{3}}{3}V.$$

k:

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}T + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}U + \tfrac{1}{2}V = W.$$

두 결과를 모두 대입하면

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V + \tfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}V + \tfrac{1}{2}V = \tfrac{5}{2}V + 2V + \tfrac{1}{2}V = 5V = W.$$

따라서

$$V = \frac{W}{5}, \qquad U = \frac{\sqrt{6}\,W}{5}, \qquad T = \frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{W}{5} = \frac{W}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,W}{3}.$$

세 값이 모두 양수이므로 모든 줄이 팽팽하며, 이는 모형과 모순되지 않는다.

검산

- 각 단위벡터의 길이는 1이다. 예를 들어 $\mathbf{e}_C$의 경우 $\frac{6}{9} + \frac{3}{36} + \frac{1}{4} = 1$이다.
- $\mathbf{e}_A$와 $\mathbf{e}_C$의 수평 부분이 이루는 각의 코사인은 $-\frac{1}{3} = -\sin\phi$이므로 그 각은 $90^\circ + \phi \approx 109.47^\circ$이고, 마땅히 그래야 한다.
- $W = 1$로 두면 $T \approx 0.5774$, $U \approx 0.4899$, $V = 0.2$이다. 이때 수직 성분의 합 $0.5774 \times 0.8660 + 0.4899 \times 0.8165 + 0.2 \times 0.5 = 0.5 + 0.4 + 0.1 = 1$이 무게와 균형을 이룬다. 깔끔하게 나뉜다는 점에 주목하자. PA, PB, PC가 각각 무게의 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$을 떠받친다.

흔한 실수

- 줄 PB에서 sin과 cos을 혼동하는 것. 이 줄이 수직선과 이루는 각은 $90^\circ - \theta$이므로 수직 성분은 $\cos\theta$가 아니라 $\sin\theta$이다.
- C를 OA에 대해 B와 같은 쪽에 두는 것. 그러면 **i** 방정식에서 장력이 음수가 되는데(즉 $V = -\frac{1}{3}W$), 줄은 음의 장력을 가질 수 없다.
- $\cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$임을 잊는 것. 그러면 $\mathbf{e}_B$와 $\mathbf{e}_C$의 **j** 성분의 부호가 틀리게 된다.

STEP 너머

서로 독립인 세 방향의 줄 세 개는 계를 **정역학적으로 결정된**(statically determinate) 계로 만든다. 즉 평형 방정식이 해가 유일한 3×3 연립일차방정식을 이룬다. 네 번째 줄을 더 하면 장력은 더 이상 정역학만으로 결정되지 않으며, 공학자들은 줄의 탄성(elasticity)까지 고려해야 한다. 이것이 구조 해석(structural analysis)의 출발점이며, 계수(rank)와 영공간(null space)을 다루는 선형대수(linear algebra)의 출발점이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식으로 힘을 벡터로 다루며, Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이러한 연립방정식이 언제 유일한 해를 가지는지 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.