풀이

STEP II 2011, 문제 10

역학 • 포물체와 충격량

> **STEP II 2011, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q10

핵심 아이디어

R이 항상 P의 연직 아래에 있으므로, 두 입자는 운동 내내 같은 수평 속도를 가진다. 따라서 줄은 연직이고, 연직 방향의 운동만 생각하면 된다. 줄은 P가 평면 위로 정확히 $\frac{1}{2}H$만큼 올라갔을 때 팽팽해진다. 이때 줄이 갑자기 당겨지는 현상(jerk)은 연직 방향의 충격량(impulse)으로, P의 위쪽 운동량(momentum)을 R과 나누어 가지게 한다. 그 뒤로 두 입자의 속도는 똑같으므로, R이 착지할 때까지 둘은 하나의 포사체(projectile)처럼 함께 날아간다.

풀이

최대 높이

입자를 중력만 받는 점으로 모형화한다. 속도의 연직 성분은 $u\sin\theta - gt$이고, 최고점에서 이 값은 0이 된다. 연직 방향으로 $v^2 = u^2 + 2as$를 쓰고 나중 연직 속력을 0으로 두면

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH \qquad \Longrightarrow \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

나중을 위해, 이 식에서 $u\sin\theta = \sqrt{2gH}$를 얻는다는 점을 기억해 두자.

줄이 팽팽해지는 때

O를 원점으로 하고, x축을 수평 방향, y축을 연직 위 방향으로 잡는다. 입자 P의 수평 속도는 항상 $u\cos\theta$이다. R이 P의 연직 아래에 계속 있으려면, 이 입자도 속력 $u\cos\theta$로 발사되어야 한다. 평면이 매끄러우므로(smooth) R은 이후 이 일정한 속력으로 미끄러진다. 따라

서 줄은 항상 연직이며, 거리 PR은 단순히 P의 높이와 같다:

$$y_P = u\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gH}\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

줄은 y_P가 처음으로 $\frac{1}{2}H$에 도달할 때 팽팽해진다(P는 $H > \frac{1}{2}H$까지 올라가므로 실제로 도달한다):

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - \sqrt{2gH}\, t + \tfrac{1}{2}H = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH - gH}}{g} = (\sqrt{2}\pm 1)\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

작은 근(root)이 처음 도달하는 시각이므로, 줄은 다음 시간 뒤에 팽팽해진다.

$$t_1 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{H/g},$$

이것이 요구된 결과이다. (큰 근은 P가 내려오면서 다시 높이 $\frac{1}{2}H$를 지나는 시각이다.)

줄이 당겨지는 순간

시각 t_1에서 P의 연직 속도는

$$u\sin\theta - gt_1 = \sqrt{2gH} - (\sqrt{2}-1)\sqrt{gH} = \sqrt{gH},$$

이고 위쪽 방향이다. 반면 R은 연직 속도가 없다. 둘의 수평 속도는 모두 $u\cos\theta$이다.

? **생각해 보기** 줄이 당겨지는 순간에 어떤 충격량들이 어느 방향으로 작용하는가?

줄이 연직이므로 장력(tension)에 의한 충격량 J도 연직이다. 이 충격량은 P에는 아래쪽으로, R에는 위쪽으로 작용한다. 평면은 매끄러워서 R을 위로 미는 것만 할 수 있는데, R은 위로 당겨져 평면에서 떨어지므로 평면은 충격량을 주지 않는다. 따라서 수평 속도는 변하지 않고, 연직 방향으로는 두 입자 전체의 운동량이 보존된다. 줄은 늘어나지 않으며(inextensible) 팽팽한 상태를 유지하므로, 직후에 P와 R은 같은 연직 속도 w를 가진다. 두 질량이 m으로 같으므로

$$m\sqrt{gH} + m\cdot 0 = 2mw \qquad\Longrightarrow\qquad w = \tfrac{1}{2}\sqrt{gH}.$$

거리 D

줄이 당겨진 뒤, 장력이 0이라면 P와 R은 같은 속도와 같은 아래쪽 가속도 g를 가진다. 따라서 둘은 고정된 거리 $\frac{1}{2}H$만큼 떨어진 똑같은 두 포사체로 움직인다. 즉 줄은 장력이 0인 채로 정확히 팽팽한 상태를 유지하며, 이는 모순이 없다. R은 높이 0에서 위쪽 속도 w로 출발하므로, 다음 시간 뒤에 평면으로 돌아온다.

$$t_2 = \frac{2w}{g} = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

따라서 R이 운동하는 전체 시간은

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{u^2\sin^2\theta}{g^2}} = \frac{u\sin\theta}{g},$$

이고, 그동안 내내 R은 수평 방향으로 $u\cos\theta$의 속력으로 움직인다. 따라서

$$D = u\cos\theta \cdot \frac{u\sin\theta}{g} = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}.$$

이것은 P 혼자 날아갈 때의 수평 도달 거리(range)의 정확히 절반이다. 즉 R은 줄이 없었다면 P가 경로의 최고점에 있었을 순간에 착지한다.

$D = H$인 경우

다음과 같이 두자.

$$\frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

양변을 $u^2\sin\theta/g$로 나누면(입자가 올라가려면 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$이어야 하므로 이 값은 0이 아니다) $\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$를 얻는다. 따라서

$$\tan\theta = 2.$$

검산

- t에 대한 두 근의 곱은 H/g이고 합은 $2\sqrt{2H/g}$이다. 이 합은 P가 최고점에 올랐다가 평면으로 돌아오는 시간으로, 대칭성에서 예상되는 그대로이다.
- 임의의 u와 θ에 대해 수치 시뮬레이션(P의 비행을 $\frac{1}{2}H$ 높이에 이를 때까지 단계별로 계산하고, 줄이 당겨지는 효과를 적용한 뒤, R이 착지할 때까지 다시 단계별로 계산)을 해 보면 결과가 t_1 및 D와 일치했다. 예를 들어 $u = 18.11$, $\theta = 0.711$, $g = 9.8$이면 두 방법 모두 $D \approx 16.543$을 준다.
- $\tan\theta = 2$, $u = 10$, $g = 9.8$일 때: $D = H \approx 4.082$.

흔한 실수

- 큰 근 $(\sqrt{2}+1)\sqrt{H/g}$를 택하는 것. 이는 P가 내려오면서 높이 $\frac{1}{2}H$를 지나는 시각이다.
- 줄이 당겨지기 전에 R이 미끄러지는 시간 t_1을 잊고, 당겨진 뒤의 비행만으로 D를 계산하는 것.
- 줄이 당겨지는 순간에 에너지 보존을 쓰는 것. 늘어나지 않는 줄이 갑자기 팽팽해지면 운동 에너지(kinetic energy)가 손실되며, 보존되는 것은 운동량뿐이다.

STEP 너머

줄이 당겨진 뒤 두 입자는 질량중심(centre of mass)에 놓인 하나의 입자와 정확히 똑같이 행동한다. 내력(internal force)은(이 문제에서는 장력) 계의 질량중심의 운동을 결코 바꾸지 않는다. 이것이 대학 1학년 과정에서 배우는 입자계와 강체(rigid body) 역학의 출발점이며, 그 과정에서는 이번과 같은 충격적 구속(impulsive constraint)도 같은 방식으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.