풀이

STEP II 2011, 문제 1

순수수학 • 제곱근이 있는 방정식

> **STEP II 2011, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q1

핵심 아이디어

두 소문항 모두 제곱근의 합을 다루는데, 정의역(domain), 양 끝점에서의 값, 대칭성을 찾고 나면 그래프를 쉽게 이해할 수 있다. 소문항 (i)에서는 그림이 부등식(inequality)을 알려 준다. 곡선은 어떤 높이 아래로 절대 내려가지 않고, 직선은 단 한 점에서만 그 높이에 도달할 수 있으므로 실제로 풀 것이 없다. 소문항 (ii)에서는 그래프가 근이 몇 개일지 알려 주고, 이를 이용해 제곱할 때 생기는 여분의 근을 버릴 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3+x}$라 하자. 두 제곱근이 모두 실수가 되려면 $1-x \geq 0$이고 $3+x \geq 0$이어야 하므로 정의역은 $-3 \leq x \leq 1$이다. 양 끝에서 $f(-3) = 2+0 = 2$이고 $f(1) = 0+2 = 2$이다.

$x = -1+t$로 놓으면 $f = \sqrt{2-t} + \sqrt{2+t}$이고, 이 식은 t를 $-t$로 바꾸어도 변하지 않으므로 곡선은 $x = -1$에 대하여 대칭이다. 미분하면

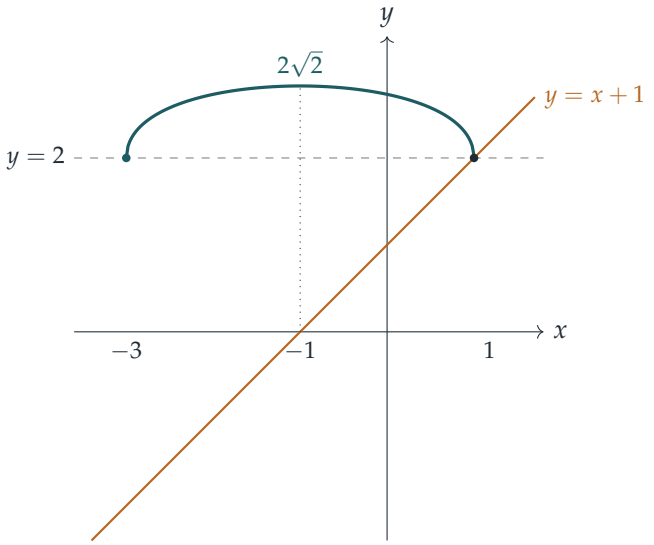
$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{3+x}},$$

이고, 이 값은 $1-x = 3+x$일 때, 즉 $x = -1$에서만 0이 되며, 이때 $f(-1) = 2\sqrt{2}$이다. $x < -1$이면 $3+x < 1-x$이므로 $f'(x) > 0$이고, $x > -1$이면 $f'(x) < 0$이다. 따라서 f는 2에서 최댓값 $2\sqrt{2}$까지 증가했다가 다시 2로 감소한다. $x = -3$ 근처에서는 f'의 둘째 항이 한없이 커지므로 곡선은 $(-3, 2)$에서 수직으로 출발하고, 마찬가지로 $(1, 2)$에 수직으로 도달한다. f의 각 항이 오목(concave)하므로 곡선 전체는 매끄러운 모자 모양이다.

최솟값을 더 깔끔하게 보는 방법은 제곱하는 것이다.

$$f(x)^2 = (1-x) + (3+x) + 2\sqrt{(1-x)(3+x)} = 4 + 2\sqrt{(1-x)(3+x)} \geq 4,$$

따라서 정의역 전체에서 $f(x) \geq 2$이고, 등호는 $x = -3$과 $x = 1$에서만 성립한다.



이제 직선 $y = x + 1$을 생각하자. 정의역에서 $x \leq 1$이므로 $x + 1 \leq 2$이고, 등호는 $x = 1$에서만 성립한다. 한편 $f(x) \geq 2$이다. 따라서 $f(x) = x + 1$이 성립하려면 양변이 모두 2가 되어야 하고, 이는 $x = 1$에서만 일어난다. 확인해 보면 $\sqrt{0} + \sqrt{4} = 2 = 1 + 1$이다. 그러므로 방정식을 만족하는 실수는 정확히 하나이다.

$$x = 1.$$

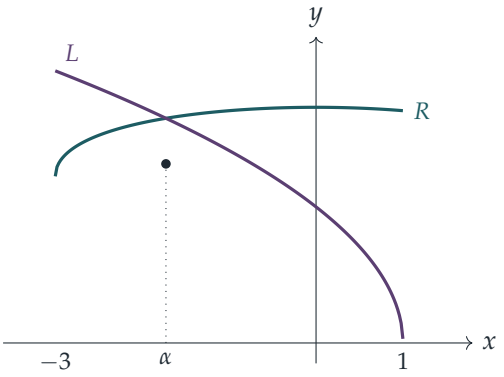
($[-3, 1]$ 밖에서는 좌변이 정의되지 않으므로 다른 후보는 없다.)

소문항 (ii)

이번에도 $x \leq 1$, $x \geq -3$, $x \leq 3$이어야 하므로 정의역은 $[-3, 1]$이다. 다음 두 함수를 비교하자.

$$L(x) = 2\sqrt{1-x} \qquad \text{그리고} \qquad R(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}.$$

L은 $L(-3) = 4$에서 $L(1) = 0$까지 순감소(strictly decreasing)한다. R은 소문항 (i)의 곡선과 같은 모양이다. R은 $x = 0$에 대하여 대칭이고(x와 $-x$를 맞바꾸어 보라), $R(\pm 3) = \sqrt{6}$이며 최댓값은 $R(0) = 2\sqrt{3}$이고, $[-3, 0]$에서 증가하고 $[0, 3]$에서 감소한다. 우리의 정의역에서는 $x = -3$부터 $x = 1$까지의 부분만 보이며, 여기서 $R(1) = 2 + \sqrt{2}$이다.



$x = -3$에서 $L = 4 > \sqrt{6} = R$이고, $x = 0$에서 $L = 2 < 2\sqrt{3} = R$이다. $[-3, 0]$에서 L은 순감소하고 R은 증가하므로 $L - R$은 순감소하며, 부호가 정확히 한 번 바뀐다. $[0, 1]$에서는 $L \leq 2$이고 $R \geq 2 + \sqrt{2}$이므로 교점이 없다. 따라서 실근은 **정확히 하나**이고, 그 근은 $-3 < x < 0$에 있다.

근을 구하기 위해 제곱한다. 양변이 모두 음이 아니므로 제곱해도 잃는 것이 없다.

$$\begin{aligned} & 4(1-x) = (3+x) + (3-x) + 2\sqrt{9-x^2} \\ \iff \quad & -1 - 2x = \sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

생각해 보기 한 번 더 제곱할 때, 새 방정식의 해 가운데 어느 것이 진짜 해인가?

우변은 제곱근이므로 ≥ 0이다. 따라서 진짜 해가 되려면 $-1 - 2x \geq 0$, 즉 $x \leq -\frac{1}{2}$이어야 한다. 이 조건 아래에서는 제곱하는 과정을 되돌릴 수 있다.

$$1 + 4x + 4x^2 = 9 - x^2 \iff 5x^2 + 4x - 8 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{11}}{5}.$$

근 $\frac{-2+2\sqrt{11}}{5} \approx 0.93$은 $x \leq -\frac{1}{2}$를 만족하지 않으므로 버린다. 다른 근 $\frac{-2-2\sqrt{11}}{5} \approx -1.73$은 이 조건을 만족하고, 그래프가 예측한 대로 $[-3, 0]$에 있다. 따라서 유일한 해는

$$x = -\frac{2 + 2\sqrt{11}}{5}.$$

검산

- $x \approx -1.72665$에서 $2\sqrt{1-x} \approx 3.3025$이고 $\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x} \approx 1.1284 + 2.1741 \approx 3.3025$이다. 양변이 일치한다.
- 버린 근 $x \approx 0.92665$에서는 $L \approx 0.542$이지만 $R \approx 3.42$이다. 이 값은 실제로 $\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1-x}$의 해이며, 이 방정식도 제곱하면 같은 식이 된다.

- 소문항 (i)에서 $f(-1) = 2\sqrt{2} \approx 2.83 > 0 = (-1) + 1$이며, 이는 직선이 $(1,2)$를 제외한 모든 곳에서 곡선 아래에 있다는 사실과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 부등식 $f \geq 2 \geq x + 1$로 곧바로 해결되는데도, 제곱하여 대수적으로 푸는 것. 이 방법은 복잡하고 가짜 근(spurious root)이 생길 수 있다.
- $5x^2 + 4x - 8 = 0$의 두 근을 모두 남겨 두는 것. 제곱할 때마다 부호 조건이 필요하며, 여기서는 $-1 - 2x \geq 0$이다.
- 정의역을 잊는 것. $x > 1$에서는 두 방정식 모두 의미가 없다.

STEP 너머

소문항 (i)은 해석학에서 흔히 쓰는 기법의 작은 예이다. $f(x) = g(x)$를 직접 푸는 대신 $f \geq c \geq g$임을 보이고 등호가 언제 성립하는지 살펴본다. 소문항 (ii)는 중간값 정리(intermediate value theorem)와 단조성(monotonicity)을 함께 이용하여 근을 구하기 전에 근의 개수를 센다. 이것이 해석학 입문 과정에서 존재성과 유일성을 증명하는 방식이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 연속성과 중간값 정리를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.