풀이

STEP I 2011, 문제 9

역학 • 포물체 운동

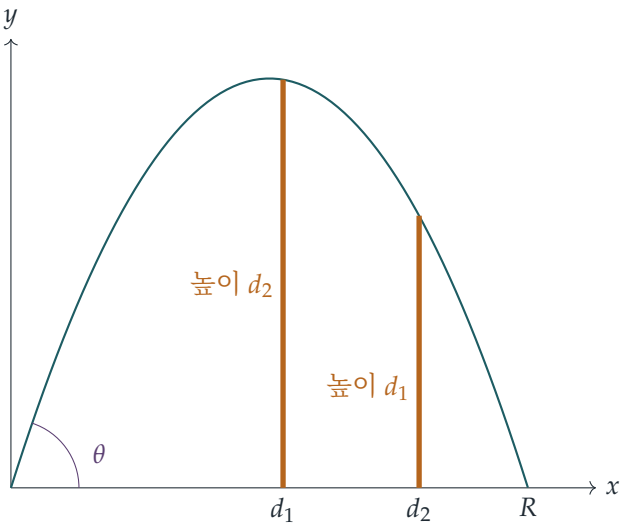
> **STEP I 2011, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q9

핵심 아이디어

궤적(trajectory)을 하나의 방정식 $y = x\tan\theta - ax^2$으로 쓴다. 여기서 상수 a는 g, 속력, 각도를 한데 묶은 것이다. 벽을 "간신히 넘는다"는 것은 경로가 벽의 꼭대기 모서리를 지난다는 뜻이므로, 벽 하나마다 두 미지수 $\tan\theta$와 a에 대한 일차방정식이 하나씩 생긴다. 이 연립방정식을 풀면 각도를 얻고, 사거리(range)는 $y = 0$의 나머지 한 근일 뿐이다.

풀이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 움직이는 점으로 모형화한다. 입자는 원점 O에서 속력 u, 각도 θ로 던져지며, x는 수평 방향, y는 연직 위쪽 방향이다. 두 벽의 높이가 서로 다르므로 $d_1 \neq d_2$라고 가정한다.



(그림은 $d_1 < d_2$인 경우를 그린 것이지만, 계산은 어느 쪽이 더 큰지와 무관하다.)

궤적

시각 t에서 $x = ut\cos\theta$, $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$이다. $t = x/(u\cos\theta)$로 시간을 소거하면

$$y = x\tan\theta - ax^2, \qquad \text{여기서} a = \frac{g}{2u^2\cos^2\theta} > 0.$$

$T = \tan\theta$로 놓는다. 입자는 각 벽을 간신히 넘으므로 벽의 꼭대기 (d_1, d_2)와 (d_2, d_1)을 지난다.

$$d_2 = d_1 T - a d_1^2, \tag{1}$$
$$d_1 = d_2 T - a d_2^2. \tag{2}$$

$\tan\theta$ 구하기

a를 소거하기 위해 (1)에 d_2^2를, (2)에 d_1^2을 곱하여 두 식의 a가 들어 있는 항이 모두 $a d_1^2 d_2^2$이 되게 한다.

$$d_2^3 = d_1 d_2^2\, T - a d_1^2 d_2^2,$$
$$d_1^3 = d_1^2 d_2\, T - a d_1^2 d_2^2.$$

두 식을 빼면

$$d_2^3 - d_1^3 = d_1 d_2 (d_2 - d_1)\, T.$$

? **생각해 보기** $d_2 - d_1$로 나누어도 될까?

그렇다. 두 벽의 높이 d_2와 d_1은 서로 다르므로 $d_1 \neq d_2$이다. (만약 같다면 벽이 하나뿐인 셈이고, 한 점만으로는 θ와 u를 모두 결정할 수 없다.) $d_2^3 - d_1^3 = (d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)$이므로 양변을 $d_1 d_2 (d_2 - d_1)$로 나누면

$$\tan\theta = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

사거리

입자는 $x \neq 0$이면서 $y = 0$인 곳, 즉 $x = T/a$에 떨어진다. 따라서 a도 구해야 한다. (1)을 d_1로, (2)를 d_2로 나누면

$$\frac{d_2}{d_1} = T - a d_1, \qquad \frac{d_1}{d_2} = T - a d_2.$$

둘째 식에서 첫째 식을 빼면 T가 사라진다.

$$a(d_2 - d_1) = \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{(d_2 - d_1)(d_2 + d_1)}{d_1 d_2}, \qquad \text{따라서} \qquad a = \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2},$$

여기서도 $d_1 \neq d_2$를 이용하였다. 그러므로 사거리는

$$R = \frac{T}{a} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2} \cdot \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 + d_2}.$$

타당성을 확인해 보면, $R - d_2 = \dfrac{d_1^2}{d_1 + d_2} > 0$이고 마찬가지로 $R - d_1 = \dfrac{d_2^2}{d_1 + d_2} > 0$이므로, 입자는 당연히 그래야 하듯 두 벽 너머에 떨어진다.

> ? **생각해 보기** g와 u는 어디로 갔을까?

이 둘은 언제나 하나의 조합 a를 통해서만 나타나고, 두 벽이 a를 완전히 결정한다. 즉 $u^2 = g/(2a\cos^2\theta)$이다. 따라서 두 벽이 궤적 전체를 결정하며, 사거리는 d_1과 d_2에만 의존한다.

검산

- 대칭성: d_1과 d_2를 맞바꾸는 것은 두 벽을 맞바꾸는 것일 뿐이며, 두 답 모두 d_1, d_2에 대하여 대칭이다.
- 수치: $d_1 = 2$, $d_2 = 3$이면 $\tan\theta = \frac{19}{6}$, $a = \frac{5}{6}$, $R = \frac{19}{5}$이다. 이때 $y(2) = \frac{19}{3} - \frac{10}{3} = 3$, $y(3) = \frac{19}{2} - \frac{15}{2} = 2$로 요구 조건을 만족한다. $g = 9.8$로 놓고 운동을 수치적으로 단계별 계산해 보아도 $x = 3.8$에 떨어진다.

- $d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1d_2$이므로 $\tan\theta \geq 3$이고, 따라서 발사각은 언제나 가파르다(약 71.6° 이상). 이는 이치에 맞는다. 먼저 더 높은 벽을 넘은 뒤 곧바로 더 낮은 벽 높이까지 내려오려면 경로가 폭이 좁은 아치 모양이어야 하기 때문이다.

흔한 실수

- 어느 벽이 어느 높이인지 혼동하는 것: 거리 d_1에 있는 벽의 높이가 d_2이다.
- a를 $\cos^2\theta$ 대신 $\cos\theta$로 쓰거나, a를 하나의 미지수로 다루지 않아 u와 θ에 대한 복잡한 연립방정식이 남는 것.
- $d_2 - d_1$이 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

여기서의 요령은 두 개의 자유 매개변수(여기서는 $\tan\theta$와 a)를 가진 곡선족이 반드시 지나야 하는 두 점에 의해 결정된다는 것으로, 이는 보간(interpolation)의 작은 예이다. 미지수의 알맞은 조합을 고르는 같은 아이디어는 역학 곳곳에서 나타나는데, 예를 들어 발사 속력이 일정한 모든 궤적의 "포락선(envelope)", 즉 안전 포물선(parabola of safety)을 구할 때도 쓰인다. 대학 1학년 수준의 포물체 운동과 입자 역학을 더 공부하려면 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.