풀이

STEP I 2011, 문제 8

순수수학 • 디오판토스 방정식

> **STEP I 2011, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q8

핵심 아이디어

세제곱 함수는 순증가(strictly increasing)하므로, m^3을 n^3, $(n+1)^3$과 비교하는 것은 m을 n, $n+1$과 비교하는 것과 같다. m이 연속한 두 정수 사이에 **엄격하게** 놓이면 m은 정수일 수 없다. 그러면 직접 확인해야 할 n의 값은 몇 개만 남는다. 소문항 (ii)에서는 같은 끼워 넣기(squeeze)를 새로운 방정식에 적용한다.

풀이

풀이 전체에서 $x \mapsto x^3$이 $\mathbb{R}$ 전체에서 순증가한다는 사실을 이용한다. 따라서 실수 a, b에 대하여

$$a < b \iff a^3 < b^3.$$

소문항 (i)(a)

$(*)$로부터

$$m^3 - n^3 = n^2 + 1 > 0,$$

이다. $n^2 \geq 0$이기 때문이다. 따라서 $m^3 > n^3$이고, 그러므로 $m > n$이다.

다음으로, $m < n+1$일 필요충분조건은 $m^3 < (n+1)^3$이다. $(*)$를 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned} m^3 < (n+1)^3 &\iff n^3 + n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\iff 0 < 2n^2 + 3n, \end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 동치이다. 모든 단계를 거꾸로 되짚을 수 있으므로 "필요충분조건"이 성립한다.

이제 $2n^2+3n = n(2n+3)$이다. 이것은 근이 $n=-\frac{3}{2}$와 $n=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 이차식이므로, 정확히 $n<-\frac{3}{2}$ 또는 $n>0$일 때 양수이다. 이러한 n에 대해서는 $m>n$과 $m<n+1$이 모두 성립한다. 따라서

$$n<m<n+1 \quad \text{단, 예외는} \quad -\tfrac{3}{2}\le n\le 0.$$

소문항 (i)(b)

m과 n이 $(*)$를 만족하는 정수라고 하자. $n<-\frac{3}{2}$ 또는 $n>0$이면 (a)에 의해 $n<m<n+1$이다. 연속한 정수 n과 $n+1$ 사이에 엄격하게 놓이는 정수는 없으므로 이는 불가능하다.

> **생각해 보기** (a)는 모든 실수 n에 대하여 성립한다. 정수라는 조건은 어디에서 쓰이는가?

두 번 쓰인다. 위에서 본 것처럼 구간 밖의 모든 n을 배제하고, 또 구간 $-\frac{3}{2}\le n\le 0$을 $n\in\{-1,0\}$으로 줄여 준다. 두 값을 모두 확인한다.

- $n=0$: $m^3=0+0+1=1$이므로 $m=1$이다.
- $n=-1$: $m^3=-1+1+1=1$이므로 $m=1$이다.

두 경우 모두 m이 정수이다. 따라서 정수해는 $(m,n)=(1,0)$과 $(1,-1)$뿐이며, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)을 그대로 따라 한다. 먼저 p를 q와 비교하면

$$p^3-q^3=2q^2-1,$$

이고, 이것은 $q^2>\frac{1}{2}$일 때마다, 즉 $q\neq 0$인 모든 정수에 대하여 양수이다. 이러한 q에 대해서는 $p>q$이다.

다음으로 p를 $q+1$과 비교하면

$$\begin{aligned} p^3<(q+1)^3 &\iff q^3+2q^2-1<q^3+3q^2+3q+1 \\ &\iff 0<q^2+3q+2=(q+1)(q+2). \end{aligned}$$

이것은 정확히 $q>-1$ 또는 $q<-2$일 때 성립한다.

두 결과를 합치자. q가 $q\neq 0, q\neq -1, q\neq -2$인 정수이면 $q<p<q+1$이므로 p는 정수일 수 없다. ($q\ge 1$ 또는 $q\le -3$이면 두 조건이 모두 성립한다.) 그러면 $q\in\{-2,-1,0\}$이 남는다.

- $q = 0$: $p^3 = -1$이므로 $p = -1$이다.
- $q = -1$: $p^3 = -1 + 2 - 1 = 0$이므로 $p = 0$이다.
- $q = -2$: $p^3 = -8 + 8 - 1 = -1$이므로 $p = -1$이다.

세 경우 모두 p가 정수이므로, 정수해는

$$(p, q) = (-1, 0), \quad (0, -1), \quad (-1, -2).$$

검산

각 답을 다시 대입해 본다. 예를 들어 $(-1)^3 = -1 = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1$이다. $|n|, |q| < 10^5$인 모든 정수에 대하여 컴퓨터로 탐색하면 $(*)$의 해 두 개와 소문항 (ii)의 해 세 개를 정확히 찾으며, 다른 해는 없다. 끼워 넣기를 수치로 확인해 볼 수도 있다. $n = 5$일 때 $m = \sqrt[3]{151} \approx 5.32$이고, 이 값은 5와 6 사이에 엄격하게 놓인다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $q = 0$을 빠뜨리는 것. 이 경우 $p^3 - q^3 = -1 < 0$이므로 하한 $p > q$가 성립하지 않아, 따로 확인해야 한다.
- 이유 없이 "$m^3 > n^3$이므로 $m > n$"이라고 쓰는 것. 이것은 세제곱이 순증가하기 때문에 참이며(제곱은 음수에서 이 성질이 성립하지 않는다), 이를 밝혀 둘 가치가 있다.
- $n < m < n + 1$에서 멈추고, 이것이 왜 m이 정수가 아님을 뜻하는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

$y^3 = f(x)$처럼 정수점을 묻는 방정식을 **디오판토스 방정식**(*Diophantine equations*)이라고 한다. 미지수를 연속한 거듭제곱 사이에 가두는 것은 이러한 방정식에 대한 표준적인 첫 공략법이다. $y^2 = x^3 + k$와 같은 더 어려운 형태는 타원곡선(elliptic curves)과 베이커(Baker)의 로그의 일차 형식(linear forms in logarithms) 이론으로 이어진다. 이들은 깊은 분야이지만, 여전히 많은 경우가 이와 같은 초등적인 범위 잡기로 해결된다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 초등 정수론에 대한 좋은 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.