풀이

STEP I 2011, 문제 7

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP I 2011, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q7

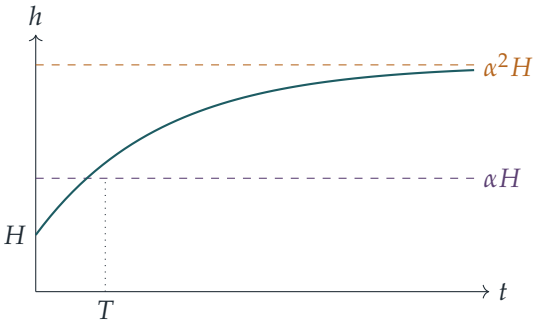
핵심 아이디어

부피는 (일정한 넓이) × 높이이므로, 높이의 변화율(rate of change)은 단순히 (유입량 − 유출량)을 넓이로 나눈 것이다. "높이가 일정하게 유지된다"는 표현이 유입량을 결정하는 단서이다. 그 높이에서는 유입량과 유출량이 정확히 균형을 이룬다. 그 뒤로는 각 소문항이 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)이 되고, 소문항 (ii)에서는 치환(substitution) $u = \sqrt{h}$를 하면 적분이 평범한 계산으로 바뀐다.

풀이

일정한 단면적(cross-sectional area)을 A, 일정한 유입률(inflow rate)을 q(단위 시간당 부피)라 하자. 물의 부피는 Ah이므로

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - (\text{유출률}).$$



높이는 H에서 출발하여 유입량과 유출량이 균형을 이루는 수준 $\alpha^2 H$를 향해 올라가며, 점

점 더 가까워지지만 결코 도달하지는 않는다. 문제는 αH에 이르기까지 시간이 얼마나 걸리는가이며, $1 < \alpha < \alpha^2$이므로 이 높이는 두 값 사이에 있다. (그림은 소문항 (i)의 경우를 나타낸다.)

소문항 (i)

어떤 상수 $\lambda > 0$에 대하여 유출률은 λh이므로

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - \lambda h.$$

$h = \alpha^2 H$일 때 높이가 일정하게 유지되므로 그곳에서 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$이고, 따라서 $q = \lambda\alpha^2 H$이다. 이를 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{A}\left(\alpha^2 H - h\right) = k\left(\alpha^2 H - h\right), \qquad k = \frac{\lambda}{A} > 0,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

높이가 올라가는 동안 내내 $H \le h < \alpha^2 H$이므로 $\alpha^2 H - h > 0$이고, 변수를 분리할 수 있다.

$$\begin{aligned} kT &= \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha^2 H - h} = \Big[-\ln\left(\alpha^2 H - h\right) \Big]_H^{\alpha H} = \ln\frac{\alpha^2 H - H}{\alpha^2 H - \alpha H} \\ &= \ln\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha} = \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

여기서 $\alpha > 1$이므로 $\alpha - 1 \neq 0$을 약분하였다. 이것이 요구된 결과이다.

α가 클 때 $x = 1/\alpha$는 작으므로

$$kT \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \approx \frac{1}{\alpha},$$

이다. α가 크면 둘째 항은 첫째 항에 비해 무시할 수 있기 때문이다.

소문항 (ii)

이제 어떤 상수 $\mu > 0$에 대하여 유출률은 $\mu\sqrt{h}$이므로 $A\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = q - \mu\sqrt{h}$이다. 높이는 $h = \alpha^2 H$에서 일정하므로 ($\alpha > 0$을 이용하면) $q = \mu\sqrt{\alpha^2 H} = \mu\alpha\sqrt{H}$이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c\left(\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}\right), \qquad c = \frac{\mu}{A} > 0.$$

이번에도 $h < \alpha^2 H$인 동안 괄호 안은 양수이므로

$$cT' = \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}}.$$

? **생각해 보기** 분모에 있는 $\sqrt{h}$는 어떻게 처리할까?

$u = \sqrt{h}$로 치환하면 $h = u^2$, $\mathrm{d}h = 2u\,\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝은 $u = \sqrt{H}$와 $u = \sqrt{\alpha H}$가 된다. 간단히 $a = \alpha\sqrt{H}$라 쓰면 피적분함수는 유리함수(rational function)가 되고, 나눗셈을 하면

$$\frac{2u}{a-u} = -2 + \frac{2a}{a-u}.$$

따라서

$$\begin{aligned} cT' &= \int_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \left(-2 + \frac{2a}{a-u}\right) \mathrm{d}u = \Big[-2u - 2a\ln(a-u)\Big]_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \\ &= -2\left(\sqrt{\alpha H} - \sqrt{H}\right) + 2\alpha\sqrt{H}\,\ln\frac{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{H}}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}\sqrt{H}} \\ &= 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

$u \le \sqrt{\alpha H} < \alpha\sqrt{H} = a$이므로($\alpha > 1$이면 $\sqrt{\alpha} < \alpha$이기 때문이다) 로그 안의 값은 모두 양수이다. 마지막으로 $\alpha - 1 = (\sqrt{\alpha}-1)(\sqrt{\alpha}+1)$, $\alpha - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-1)$로 인수분해하면

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

이므로

$$cT' = 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

α가 클 때 $1/\sqrt{\alpha}$는 작으므로

$$\alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \approx \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2\alpha}\right) = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

큰 항 $\pm\sqrt{\alpha}$가 상쇄되어

$$cT' \approx 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{H}.$$

만 남는다. 여기서는 로그의 x^2 항이 필요했다는 점에 주목하자. $\ln(1+x) \approx x$만 사용하면 괄호 안이 1이 되어 $2\sqrt{H}$를 얻게 되는데, 이는 틀린 값이다. 문제에서 두 항까지의 근사(approximation)를 주는 이유가 바로 이것이다.

검산

- $\alpha \to 1^+$일 때 (i)에서 $kT \to \ln 2$이며 0이 아니다. 이는 옳다. 평형(equilibrium)까지의 간격은 처음에 $(\alpha^2-1)H \approx 2(\alpha-1)H$이고 $(\alpha^2-\alpha)H \approx (\alpha-1)H$로 줄어들어야 하므로 간격이 절반이 되며, 비율 k인 지수적 감소(exponential decay)에서 절반이 되는 데 걸리는 시간은 $(\ln 2)/k$이다. (ii)에서는 $cT' \to 2\sqrt{H}\ln 2$인데, 이는 $h = H$ 근처에서 $\sqrt{h}$를 선형화(linearising)하여 얻는 유효 비율 $c/(2\sqrt{H})$로 똑같이 절반이 되는 것과 일치한다.

- $\alpha = 4$, $H = 1$일 때 $kT = \ln 1.25 \approx 0.2231$이고 $cT' = 2(-1 + 4\ln 1.5) \approx 1.2437$이다. 여러 무작위 H, α, k, c에 대하여 두 미분방정식을 수치적으로(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀어 보면 두 공식이 모두 10^{-9} 이내로 재현된다.
- $\alpha = 10^4$, $H = 2$일 때 $\alpha \ln(1 + 1/\alpha) \approx 0.99995$이고 $cT'/\sqrt{H} \approx 1.0066$이므로 극한값과 들어맞는다(다음 항까지 고려하면 $cT' \approx \sqrt{H}\,(1 + \frac{2}{3\sqrt{\alpha}})$이다).

흔한 실수

- 평형 조건을 이용하여 유입률을 소거하는 것을 잊어, 상수가 너무 많이 남는 경우.
- 소문항 (ii)에서 $\ln(1 + x) \approx x$만 사용하여 결정적인 $-\frac{1}{2}$를 잃어버리는 경우.
- $\sqrt{\alpha^2 H}$를 $\alpha^2\sqrt{H}$로 쓰는 경우.

STEP 너머

두 모형은 모두 $h = \alpha^2 H$에서 안정 평형(stable equilibrium)을 갖는 1계 자율 미분방정식(first-order autonomous differential equation) $\dot{h} = f(h)$이다. 선형인 경우는 모습만 바꾼 뉴턴(Newton)의 냉각 법칙이고, $\sqrt{h}$인 경우는 구멍을 통한 유출에 관한 토리첼리(Torricelli)의 법칙이다. 방정식을 명시적으로 풀지 않고 평형점과 그 안정성을 연구하는 것이 상미분방정식(ODE)의 정성적 이론(qualitative theory)의 출발점이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 앞부분의 장들에서 자율 방정식과 탱크 혼합 모형을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.