풀이

STEP I 2011, 문제 6

순수수학 • 이항급수의 합

> **STEP I 2011, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q6

핵심 아이디어

$(1-x)^{-3}$의 계수(coefficient)를 알고 나면, 여기에 다항식(polynomial)을 곱하는 일은 이웃한 계수 몇 개를 섞는 것에 지나지 않는다. 따라서 더 복잡한 유리함수(rational function)의 계수도 거의 공짜로 얻는다. 이 과정을 거꾸로 읽으면, 항이 (다항식, 변수는r) $\times\, x^r$ 꼴인 급수(series)는 그것을 생성하는 유리함수가 무엇인지 알아본 뒤 알맞은 x의 값, 여기서는 $x=\frac{1}{2}$를 대입하여 그 합을 구할 수 있다.

풀이

첫 번째 결과

$|x|<1$일 때 지수(index)가 -3인 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$(1-x)^{-3}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r.$$

분자는 r개의 인수로 이루어지고 각 인수는 음수이므로, 그 곱은 $(-1)^r\,\dfrac{(r+2)!}{2!}$이며, 이 $(-1)^r$은 $(-x)^r$에서 나오는 부호와 상쇄된다. 따라서 x^r의 계수는

$$a_r=\frac{(r+2)!}{2!\,r!}=\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (따라서 $a_0=1, a_1=3, a_2=6, a_3=10, \ldots$)

소문항 (i)

다음과 같이 쓴다.

$$\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^3} = (1-x+2x^2)\sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

x^r항은 $1\cdot a_r x^r$, $-x\cdot a_{r-1}x^{r-1}$, $2x^2\cdot a_{r-2}x^{r-2}$에서 생기므로, $r\geq 2$일 때 x^r의 계수는

$$\begin{aligned} a_r - a_{r-1} + 2a_{r-2} &= \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) - \tfrac{1}{2}r(r+1) + (r-1)r \\ &= (r+1) + r^2 - r \\ &= r^2 + 1. \end{aligned}$$

생각해 보기 a_{r-1}이나 a_{r-2}가 존재하지 않는 $r=0$과 $r=1$에서도 이 식이 성립하는가?

그렇다. $a_{-1} = a_{-2} = 0$으로 두면, 식 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$도 $r=-1$과 $r=-2$에서 0이 되므로 위의 계산은 모든 $r\geq 0$에 대하여 성립한다. 직접 확인해 보면, 상수항은 $a_0 = 1 = 0^2+1$이고 x의 계수는 $a_1 - a_0 = 2 = 1^2+1$이다. 따라서 모든 $r\geq 0$에 대하여 x^r의 계수는 r^2+1이고, 이것이 구하려던 결과이다.

급수를 보면, 분자 $1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \ldots$은 $r = 0, 1, 2, \ldots$에 대한 r^2+1이고 분모는 2^r이다. 따라서 이 급수는

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r^2+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^r,$$

이며, 이것은 위의 전개식에 $x = \frac{1}{2}$를 대입한 것이다. $(1-x)^{-3}$의 이항전개는 $|x|<1$에서 수렴(converge)하므로 이 대입은 정당하다. 따라서

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{5}{4} + \frac{10}{8} + \cdots = \frac{1 - \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

소문항 (ii)

먼저 할 일은 규칙을 찾는 것이다. 각 항을 분모가 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$가 되도록 다시 쓰면

$$1, \frac{4}{2}, \frac{9}{4}, \frac{16}{8}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}, \frac{49}{64}, \cdots$$

이므로, 이 급수는 $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+1)^2}{2^r}$이다.

생각해 보기 $(1-x)^3$ 위에 어떤 분자를 올려야 계수가 $(r+1)^2$이 되는가?

소문항 (i)을 보면 (이번에도 짧은 다항식인) 분자 $1+x$를 시도해 볼 만하다. $(1+x)(1-x)^{-3}$에서 x^r의 계수는

$$a_r + a_{r-1} = \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) + \tfrac{1}{2}r(r+1) = \tfrac{1}{2}(r+1)(2r+2) = (r+1)^2,$$

이고, 이는 (앞에서처럼 $a_{-1}=0$으로 두면) 모든 $r \geq 0$에 대하여 성립한다. $x = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$1+2+\frac{9}{4}+2+\frac{25}{16}+\cdots = \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}\cdot 8 = 12.$$

다른 방법: 소문항 (i)을 이용하기. $s = r+1$로 첨자를 옮기면 $2^{-r} = 2\cdot 2^{-s}$이므로

$$\sum_{r\geq 0}\frac{(r+1)^2}{2^r} = 2\sum_{s\geq 1}\frac{s^2}{2^s} = 2\left(\sum_{s\geq 0}\frac{s^2+1}{2^s} - \sum_{s\geq 0}\frac{1}{2^s}\right) = 2(8-2) = 12,$$

이다. 여기서 소문항 (i)의 답과 등비급수(geometric series) $\sum 2^{-s} = 2$를 이용하였다.

검산

- $(1-x)^{-3}$을 $(1+x+x^2+\cdots)^3$으로 보고 손으로 전개하거나, 몇 항을 직접 곱해 보면 $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$을 얻으며, 이는 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$와 일치한다.
- 소문항 (i) 급수의 부분합(partial sum)은 8에 가까워진다. 200개의 항을 더하면 그 합은 기계 정밀도 수준까지 8과 일치한다. 극한이 12인 소문항 (ii)에서도 마찬가지이다.
- 소문항 (ii)의 두 방법은 같은 답 12를 준다.

흔한 실수

- 이항계수의 부호를 틀리는 것: $(-3)(-4)\cdots$에서 r개의 음의 부호가, $(-x)^r$에서 r개의 음의 부호가 나오며, 이들은 서로 상쇄된다.
- 소문항 (ii)에서 일부 분수가 기약분수(lowest terms)로 주어져 있어서 규칙을 잘못 읽는 것: $2 = \frac{4}{2} = \frac{16}{8}$이고 $\frac{9}{8} = \frac{36}{32}$이다.
- 전개식이 그 점에서 수렴한다는 사실($|x|<1$)을 언급하지 않고 $x = \frac{1}{2}$를 대입하는 것.

STEP 너머

우리가 지금까지 한 일은 **생성함수**(*generating function*)를 이용한 것이다. 수열 $c_0, c_1, c_2, \ldots$을 멱급수(power series) $\sum c_r x^r$로 나타내면, 수열에 대한 연산이 함수에 대한

대수 계산이 된다. 사실 r에 대한 임의의 다항식에 x^r을 곱한 것의 합은 분모가 $(1-x)$의 거듭제곱인 유리함수가 되며, 이 때문에 이러한 합은 언제나 유리식으로 나온다. x의 값을 대입하는 것이 정당함을 보이려면 멱급수와 그 수렴반지름(radius of convergence)에 대한 이론이 필요한데, 이는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 다룬다. 문제 해결 도구로서의 생성함수에 대해서는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 고급 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.