풀이

STEP I 2011, 문제 5

순수수학 • 절댓값이 있는 적분

STEP I 2011, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q5

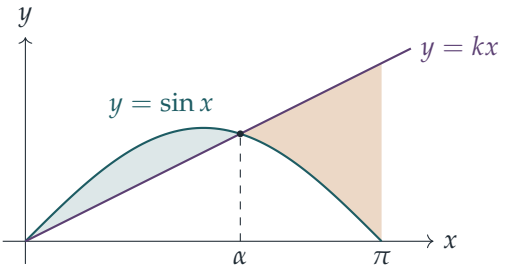
핵심 아이디어

절댓값(modulus) 기호는 $\sin x - kx$의 부호가 어디에서 바뀌는지 알기 전까지만 거추장스럽다. 그림이 답을 알려 준다. $x = \alpha$에서 단 한 번 바뀐다. 그 점에서 적분(integral)을 나누면 절댓값이 사라진다. 마지막 단계는 k를 변수로 생각하지 않는 것이다. $k = \sin\alpha/\alpha$이므로 모든 것을 α로 나타낼 수 있고, 그러면 I의 도함수(derivative)가 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

유일한 근(root)

$g(x) = \sin x - kx$라 하자. 직선 $y = kx$는 원점을 지나고 기울기(gradient)가 $k < 1$이며, 곡선 $y = \sin x$는 기울기 $\cos 0 = 1$로 원점을 떠난다. 따라서 0의 바로 오른쪽에서는 사인 곡선이 직선보다 위에 있다. $x = \pi$에서 사인 곡선은 다시 0으로 돌아오지만 직선의 높이는 $k\pi > 0$이므로, 그곳에서는 직선이 위에 있다. $y = \sin x$는 $(0, \pi)$에서 아래로 휘어 있고 직선은 곧으므로, 둘은 그 사이에서 정확히 한 번 만난다.



"정확히 한 번"을 빈틈없이 보이자. $g(0) = 0$, $g'(x) = \cos x - k$이고, $(0, \pi)$에서 $g''(x) =$

$-\sin x < 0$이다. 따라서 g'은 순감소(strictly decreasing)하여 0에서의 값 $1-k>0$부터 π에서의 값 $-1-k<0$까지 변하고, 정확히 한 점 β에서만 영이 된다. 그러므로 g는 $(0,\beta]$에서 순증가(strictly increasing)하므로 그곳에서 양수이고(0에서 출발하므로), $[\beta,\pi)$에서는 양수 값에서 $g(\pi)=-k\pi<0$까지 순감소한다. 따라서 이 함수는 $(0,\pi)$에서 정확히 하나의 영점 α를 가지며,

$$\sin x > kx \text{ 단, } 0<x<\alpha, \qquad \sin x < kx \text{ 단, } \alpha<x<\pi.$$

I 계산하기

이 부호들(그림에서 청록색과 호박색 영역)을 이용하면

$$I=\int_0^{\alpha}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x-kx$의 부정적분(antiderivative) 하나는 $F(x)=-\cos x-\frac{1}{2}kx^2$이므로

$$\begin{aligned} I &= (F(\alpha)-F(0))-(F(\pi)-F(\alpha)) = 2F(\alpha)-F(0)-F(\pi)\\ &= (-2\cos\alpha-k\alpha^2)+1-(1-\tfrac{1}{2}k\pi^2)\\ &= \tfrac{1}{2}k\pi^2-2\cos\alpha-k\alpha^2. \end{aligned}$$

α는 $(*)$의 해이므로 $k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$이고, 따라서 $k\alpha^2=\alpha\sin\alpha$이며

$$I=\frac{\pi^2\sin\alpha}{2\alpha}-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

정류값(stationary value)

생각해 보기 α는 어떤 값을 가질 수 있는가?

각 $k\in(0,1)$마다 $\alpha\in(0,\pi)$가 하나 정해진다. 역으로, 각 $\alpha\in(0,\pi)$는 $k=\sin\alpha/\alpha$로부터 얻어지며, 그 구간에서 $0<\sin\alpha<\alpha$이므로 이 값은 $(0,1)$에 속한다. 따라서 열린구간(open interval) $(0,\pi)$의 모든 α에 대하여 $I(\alpha)$를 조사해야 한다.

첫째 항에 몫의 미분법(quotient rule)을 써서 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}+2\sin\alpha-(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)\\ &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}-(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &= (\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{\pi^2}{2\alpha^2}-1\right). \end{aligned}$$

첫째 인수는 $(0,\pi)$에서 결코 영이 되지 않는다. $h(\alpha) = \alpha\cos\alpha - \sin\alpha$라 하자. 그러면 $h(0) = 0$이고 $(0,\pi)$에서 $h'(\alpha) = \cos\alpha - \alpha\sin\alpha - \cos\alpha = -\alpha\sin\alpha < 0$이므로, 구간 전체에서 $h(\alpha) < 0$이다. (같은 말로, $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $\tan\alpha > \alpha$이고, 그 너머에서는 $\cos\alpha \le 0$이다.)

따라서 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$인 것은 정확히 $\pi^2 = 2\alpha^2$일 때, 즉 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$일 때이며, 이 값은 실제로 $(0,\pi)$에 속한다. 이것이 유일한 정류값이다. $h < 0$이므로 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha$의 부호는 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} - 1$의 부호와 반대이다.

- $0 < \alpha < \pi/\sqrt{2}$이면 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} > 1$이므로 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha < 0$이다.
- $\pi/\sqrt{2} < \alpha < \pi$이면 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} < 1$이므로 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha > 0$이다.

따라서 I는 감소하다가 증가한다. 그러므로 이 정류값은 극솟값(minimum)이고, 구간에서 유일한 정류점이므로 I의 가장 작은 값이다.

$\alpha = \pi/\sqrt{2}$에서는 $\dfrac{\pi^2}{2\alpha} = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{2}\,\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \alpha$이므로, I의 첫째 항과 셋째 항이 상쇄된다.

$$I_{\min} = \alpha\sin\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha = -2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\pi/\sqrt{2} \approx 2.22$는 코사인이 음수인 $\frac{1}{2}\pi$와 π 사이에 있으므로, 이 값은 당연히 양수이다.

검산

- $k \to 0$이면 $\alpha \to \pi$이고 공식은 $I \to 2$를 주는데, 이는 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$이다. $k \to 1$이면 $\alpha \to 0$이고 $I \to \frac{1}{2}\pi^2 - 2$인데, 이는 $\int_0^\pi (x - \sin x)\,\mathrm{d}x$이다.
- 수치로 계산하면 $-2\cos(\pi/\sqrt{2}) \approx 1.2114$이고, 이는 양 끝값 2와 $\frac{1}{2}\pi^2 - 2 \approx 2.935$보다 모두 작다. $k = \sin\alpha/\alpha \approx 0.3582$로 두고 $\int_0^\pi |\sin x - kx|\,\mathrm{d}x$를 중점법(midpoint rule)으로 직접 수치적분해도 1.2114를 얻는다.

흔한 실수

- k를 상수로 취급하면서 α에 대해 미분하는 것. k는 α에 의존하며, 바로 그 때문에 먼저 $k = \sin\alpha/\alpha$를 대입하는 것이다.
- $\alpha = \pi/\sqrt{2}$에서만 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$임을 보이고, $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$가 $(0,\pi)$에서 영점을 갖지 않음을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

유일한 근에 대한 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem)와 순단조성(strict monotonicity)을 함께 사용하고, 최소화 과정은 $\alpha \mapsto k$가 $(0, \pi)$와 $(0, 1)$ 사이의 전단사(bijection)라는 사실, 즉 α에 대해 최소화하는 것이 k에 대해 최소화하는 것과 같다는 사실을 조용히 사용한다. 이러한 재매개화(reparametrisation)와 존재 논증을 엄밀하게 만드는 것은 실해석학(real analysis) 첫 강의가 다루는 일이다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 공부를 시작하기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.