풀이

STEP I 2011, 문제 4

순수수학 • 포물선의 접선

> **STEP I 2011, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q4

핵심 아이디어

포물선(parabola) 위의 일반적인 점에서의 접선(tangent)을 분수가 없는 꼴로 쓰면, 두 접선의 교점은 빼기만 해도 바로 나온다. 각을 구할 때는 $\overrightarrow{FT}$와 $\overrightarrow{FP}$의 내적(scalar product)을 이용한다. 길이 계산은 보기보다 수월하다. FP는 초점 거리(focal distance)이고, FT^2은 인수분해된다. $\cos\phi$를 구하고 나면 그 답이 p와 q에 대하여 대칭이라는 점에 주목하자. 이 대칭성이 이등분 논증의 전부이다.

풀이

점 T

$y^2 = 4ax$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$이므로, $y = 2ap \neq 0$인($p \neq 0$이므로) 점 P에서 기울기는 $\dfrac{4a}{4ap} = \dfrac{1}{p}$이다. 따라서 P에서의 접선은

$$y - 2ap = \frac{x - ap^2}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + ap^2,$$

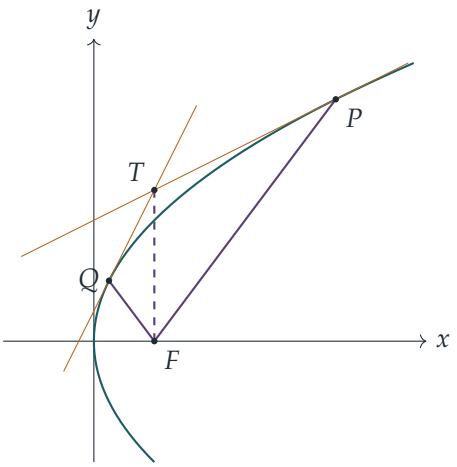
이고, 마찬가지로 Q에서의 접선은 $qy = x + aq^2$이다. 두 식을 빼면

$$(p - q)\,y = a(p^2 - q^2) = a(p - q)(p + q).$$

P와 Q는 서로 다른 점이므로 $p \neq q$이고, 따라서 $p - q$로 나누어 $y = a(p + q)$를 얻는다. 그러면

$$x = py - ap^2 = ap^2 + apq - ap^2 = apq,$$

이므로 T는 점 $(apq,\, a(p + q))$이고, 이것이 구하는 결과이다.



그림은 $a = 1$, $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$인 경우이며, 이때 FT는 마침 수직이다.

각 ϕ

먼저 $T \neq F$임에 주의하자. $T = F$이려면 $p + q = 0$이고 $pq = 1$이어야 하므로 $p^2 = -1$이 되어 불가능하다. 따라서 각 TFP는 의미가 있다. $F = (a, 0)$이므로

$$\overrightarrow{FP} = a\begin{pmatrix} p^2 - 1 \\ 2p \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{FT} = a\begin{pmatrix} pq - 1 \\ p + q \end{pmatrix}.$$

길이는

$$FP^2 = a^2[(p^2-1)^2 + 4p^2] = a^2(p^2+1)^2,$$
$$FT^2 = a^2[(pq-1)^2 + (p+q)^2] = a^2[p^2q^2 + p^2 + q^2 + 1] = a^2(p^2+1)(q^2+1),$$

이다. 교차항 $-2pq$와 $+2pq$가 상쇄되기 때문이다. 따라서 $FP = |a|(p^2+1)$이고 $FT = |a|\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}$이다.

> **생각해 보기** 내적이 인수분해되리라는 것을 어떻게 알아챌 수 있을까?

(p^2+1)이 FP와 약분되리라 예상되므로 이 인수를 찾아본다. 전개하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FT} &= a^2[(p^2-1)(pq-1) + 2p(p+q)] \\ &= a^2[p^3q - p^2 - pq + 1 + 2p^2 + 2pq] \\ &= a^2[p^3q + pq + p^2 + 1] \\ &= a^2(p^2+1)(pq+1).\end{aligned}$$

따라서 $|a|^2 = a^2$을 이용하면

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FT}}{FP \cdot FT} = \frac{a^2(p^2+1)(pq+1)}{a^2(p^2+1)\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}} = \frac{pq+1}{\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

이등분

T의 좌표는 p와 q에 대하여 대칭이므로, 위의 계산에서 P와 Q의 역할을 바꾸면 각 TFQ에 대하여

$$\cos\angle TFQ = \frac{qp+1}{\sqrt{(q^2+1)(p^2+1)}} = \cos\phi.$$

임을 알 수 있다. 두 각은 모두 $[0,\pi]$에 속하고, 이 구간에서 코사인은 일대일(one-to-one)이므로 $\angle TFP = \angle TFQ = \phi$이다.

따라서 반직선 FP와 FQ는 각각 반직선 FT와 각 ϕ를 이룬다. 평면에서 F를 시작점으로 하여 FT와 각 ϕ를 이루는 반직선은 두 개뿐이며, 이 둘은 직선 FT에 대하여 서로 대칭이다. 반직선 FP와 FQ는 같은 반직선이 아니다. 초점을 지나는 직선은 포물선과 F의 양쪽에 있는 두 점에서 만나므로(또는 한 점에서만 만나므로), F에서 시작하는 하나의 반직선이 P와 Q를 모두 지날 수는 없다. 그러므로 FP와 FQ는 직선 FT에 대하여 서로의 대칭이고, 이는 바로 직선 FT가 각 PFQ를 이등분(bisect)한다는 명제이다.

문제에서 굳이 **직선** FT라고 말하는 이유를 설명해 주는 세부 사항이 하나 있다. $pq+1>0$이면 $\phi<\frac{\pi}{2}$이고, 반직선 FT 자체가 각 $PFQ=2\phi$의 내부에 놓인다. $pq+1<0$이면 $\phi>\frac{\pi}{2}$이고, 각 PFQ는 $2\pi-2\phi$이며, 이 각을 이등분하는 것은 TF를 F 너머로 연장한 부분이다. $pq=-1$이면 PQ는 초점현(focal chord)이고 $\phi=\frac{\pi}{2}$이며, FT는 PQ에 수직이어서 평각을 이등분한다. 어느 경우든 직선 FT는 각 PFQ를 이등분한다.

검산

그림처럼 $a=1$, $p=2$, $q=\frac{1}{2}$로 잡으면 $T=(1,\frac{5}{2})$, $\overrightarrow{FP}=(3,4)$, $\overrightarrow{FQ}=(-\frac{3}{4},1)$, $\overrightarrow{FT}=(0,\frac{5}{2})$이다. 그러면 $\cos\angle TFP=\frac{4}{5}$이고 $\cos\angle TFQ=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}$이며, 이는 $\dfrac{2}{\sqrt{5\cdot\frac{5}{4}}}=\dfrac{4}{5}$와 일치한다. 컴퓨터로 a(양수와 음수 모두), p, q를 무작위로 10^5번 골라 시험한 결과, T의 좌표, $\cos\phi$의 공식, 그리고 이등분이 10^{-10} 이내에서 확인되었다. 여기에는 FT를 뒤쪽으로 연장한 부분이 이등분하는 $pq<-1$인 경우도 많이 포함되었다.

흔한 실수

- $p-q$가 왜 0이 아닌지(두 점이 서로 다르기 때문) 말하지 않고 $p-q$로 나누는 것.
- $FP=a(p^2+1)$이라고 쓰는 것. 이는 $a<0$이면 틀린다. $\cos\phi$에는 a^2만 나타나므로 결국 a의 부호는 상관없다.

- FP와 FQ가 왜 직선 FT의 반대쪽에 놓이는지 설명하지 않고 "코사인이 같으므로 FT가 이등분한다"고 말하는 것.

STEP 너머

이것은 모습을 바꾼 포물선의 반사 성질(reflective property)이다. 즉 외부의 어떤 점에서 그은 두 접선 선분을 초점에서 보면 같은 각으로 보인다. 타원(ellipse)과 쌍곡선(hyperbola)에서도 같은 성질이 성립하며, 세 경우 모두 이차곡선(conic)의 초점–준선(focus–directrix) 정의에서 나온다. 이 정의는 대학 1학년 기하학과 사영기하학(projective geometry) 강의에서 훨씬 더 깊이 다룬다. 이러한 성격의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)가 무료로 공개되어 있으며 끝까지 풀어 볼 가치가 충분하다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.