풀이

STEP I 2011, 문제 3

순수수학 • 삼각함수 항등식

> **STEP I 2011, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q3

핵심 아이디어

$\frac{1}{3}\pi \mp \theta$에서의 두 사인의 곱은 제곱의 차(difference of squares) 기법으로 깔끔하게 정리되고, 이것으로 $(*)$가 한 줄 만에 증명된다. 그다음 코탄젠트(cotangent)의 합은 곱을 미분하여 얻는다. 세 인수의 곱의 도함수(derivative)를 그 곱 자체로 나누면 세 개의 "로그 도함수(logarithmic derivative)"의 합이 되고, 사인의 경우 이것들은 코탄젠트이다. 코사인 버전에 같은 작업을 하면 탄젠트가 나오고, $\tan x + \cot x$는 하나의 코시컨트(cosecant)이다.

풀이

항등식 $(*)$

$a = \frac{1}{3}\pi$라 하자. 덧셈정리(compound-angle formulae)에 의하여

$$\begin{aligned}\sin(a-\theta)\sin(a+\theta) &= (\sin a\cos\theta - \cos a\sin\theta)(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)\\ &= \sin^2 a\cos^2\theta - \cos^2 a\sin^2\theta\\ &= \sin^2 a\,(1-\sin^2\theta) - (1-\sin^2 a)\sin^2\theta = \sin^2 a - \sin^2\theta.\end{aligned}$$

이다. $\sin^2 a = \frac{3}{4}$이므로

$$4\sin\theta\sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 4\sin\theta\left(\tfrac{3}{4}-\sin^2\theta\right) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta,$$

이고, 마지막 등식은 삼배각 공식(triple-angle formula)에 의한 것이다. 이로써 모든 θ에 대하여 $(*)$가 증명된다.

소문항 (i)

$(*)$는 모든 θ에 대하여 성립하므로 양변을 미분할 수 있다. 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$4\Big[\cos\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)-\sin\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta) \\ +\sin\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\Big]=3\cos 3\theta,$$

이다. 여기서 가운데 항의 음의 부호는 $a-\theta$에 연쇄 법칙(chain rule)을 적용하여 생긴 것이다.

생각해 보기 이것을 어떻게 코탄젠트로 바꿀 수 있을까?

양변을 $\sin 3\theta$로 나눈다. $(*)$에 의하여 이것은 $4\sin\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)$와 같다. 그러면 좌변의 각 항에서 미분된 것 하나를 제외한 모든 사인이 약분된다. 이 나눗셈은 $\sin 3\theta\neq 0$일 때마다 가능하며, 이때 세 사인도 모두 0이 아니다. 따라서

$$\cot\theta-\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\cot 3\theta \qquad (\sin 3\theta\neq 0). \tag{A}$$

를 얻는다. 이제 $\theta=\frac{1}{9}\pi$를 대입하자. 이때 $\sin 3\theta=\sin\frac{1}{3}\pi\neq 0$이다. $\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$이고 $\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$이므로

$$\cot\tfrac{1}{9}\pi-\cot\tfrac{2}{9}\pi+\cot\tfrac{4}{9}\pi=3\cot\tfrac{1}{3}\pi=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

이 되어 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

$(*)$에 $\theta=\frac{1}{6}\pi-\phi$를 대입한다. 매번 $\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$를 이용하면 네 사인은

$$\begin{aligned}\sin\theta=\sin(\tfrac{1}{6}\pi-\phi)&=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)=\sin(\tfrac{1}{6}\pi+\phi)&=\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\phi)&=\cos\phi,\\ \sin 3\theta=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-3\phi)&=\cos 3\phi,\end{aligned}$$

가 된다. 따라서 ϕ를 다시 θ로 바꾸어 쓰면

$$4\cos\theta\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cos 3\theta \qquad \text{모든}\theta. \tag{**}$$

이다. $(*)$를 $(**)$로 나누면 인수 4가 약분되고, 사인을 코사인으로 나눈 것은 각각 탄젠트가 된다. 역수를 취하면

$$\cot\theta\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cot 3\theta,$$

이다. 이 식은 양변이 정의되는 모든 곳, 즉 $\sin 3\theta \neq 0$이고 $\cos 3\theta \neq 0$인 곳에서 성립한다(각 조건은 대응하는 세 인수가 0이 아님을 보장한다).

코시컨트의 합을 구하기 위해 소문항 (i)에서와 똑같이 $(**)$를 미분한다.

$$4\Big[-\sin\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)+\cos\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta) \\ -\cos\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\Big] = -3\sin 3\theta.$$

$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)$로 나누고(0이 아닐 때) -1을 곱하면

$$\tan\theta - \tan(\tfrac{1}{3}\pi-\theta) + \tan(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 3\tan 3\theta. \qquad \text{(B)}$$

이다. (A)와 (B)의 부호가 일치하므로 둘을 더할 수 있다.

? 생각해 보기 탄젠트와 코탄젠트를 더하는 것이 왜 도움이 될까?

$\tan x + \cot x$가 하나의 코시컨트이기 때문이다.

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

따라서 $\sin 6\theta \neq 0$일 때마다 (A)와 (B)를 더하면

$$2\operatorname{cosec} 2\theta - 2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi - 2\theta) + 2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi + 2\theta) = 6\operatorname{cosec} 6\theta.$$

를 얻는다. 이제 $\theta = \frac{1}{18}\pi$로 두면 $2\theta = \frac{1}{9}\pi$이고 $6\theta = \frac{1}{3}\pi$이다(이때 $\sin 6\theta \neq 0$). $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{9}\pi = \frac{5}{9}\pi$이고 $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{9}\pi = \frac{7}{9}\pi$이므로, 2로 나누면

$$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{9}\pi - \operatorname{cosec}\tfrac{5}{9}\pi + \operatorname{cosec}\tfrac{7}{9}\pi = 3\operatorname{cosec}\tfrac{1}{3}\pi = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

이 되어 증명이 끝난다.

검산

- $\theta = \frac{1}{6}\pi$에서 $(*)$는 $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1 = \sin\frac{1}{2}\pi$가 되고, $\theta = 0$에서 $(**)$는 $4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 = \cos 0$이 된다.
- 수치적으로 $\cot 20^\circ - \cot 40^\circ + \cot 80^\circ \approx 2.7475 - 1.1918 + 0.1763 = 1.7321 \approx \sqrt{3}$이고, $\operatorname{cosec} 20^\circ - \operatorname{cosec} 100^\circ + \operatorname{cosec} 140^\circ \approx 2.9238 - 1.0154 + 1.5557 = 3.4641 \approx 2\sqrt{3}$이다.
- 항등식 (A), (B)와 코탄젠트의 곱에 대한 식은 계산기로 임의의 θ에서 확인해 볼 수 있다. 우리는 무작위로 고른 수천 개의 값에서 이를 확인하였다.

흔한 실수

- $\sin(\frac{1}{3}\pi - \theta)$를 미분할 때 연쇄 법칙에서 나오는 음의 부호를 잊는 것. 그러면 (A)에서 번갈아 나타나는 부호가 망가진다.
- $\sin 3\theta$로 나누면서, 대입하는 값에서 그것이 0이 아니어야 한다는 점을 밝히지 않는 것.
- 코탄젠트의 곱에서 코시컨트의 합을 얻으려 하는 것. 결합되는 것은 **합** (A)와 (B)이다.

STEP 너머

도함수를 함수로 나누는 이 기법이 바로 로그 미분법(logarithmic differentiation)이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f| = f'/f$는 곱을 합으로 바꾸어 준다. 더 나아가면 sin 자체를 그 영점들에 걸친 무한곱(infinite product)으로 쓸 수 있고, 여기에 로그 미분법을 적용하면 유명한 부분분수 전개(partial-fraction expansion) $\pi\cot\pi x = \sum_n \frac{1}{x-n}$을 얻는다. 항등식 $(*)$는 이것의 유한한 그림자이다. 이러한 아이디어는 복소해석학(complex analysis)에서 전개되며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 공부를 시작하기에 아름다운 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.