풀이

STEP I 2011, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2011, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q2

핵심 아이디어

적분 E는 초등함수로 나타낸 닫힌 형태(closed form)가 없으므로, 이 값을 직접 계산하려고 하지 않는다. 대신 나머지 적분들을 모두 변형하여 E 자체가 나타나도록 한다. 처음 두 적분에서는 다항식의 나눗셈(algebraic division)으로 분수를 쪼개어 골치 아픈 $\frac{1}{1+x}$ 부분을 따로 떼어 낸다. (i)과 (ii)에서는 피적분함수(integrand)가 다시 $[0,1]$ 위의 $\frac{\mathrm{e}^u}{1+u}$가 되도록 치환(substitution)을 고른다. 지수를 보고, 무엇을 새로운 변수로 삼으면 좋을지 생각해 보자.

풀이

처음 두 적분

$x = (1+x) - 1$로 쓰면

$$\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x} = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x}{1+x},$$

이므로

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - E = \mathrm{e} - 1 - E,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 적분에서는 x^2을 $1+x$로 나눈다. $x^2 = (x-1)(1+x) + 1$이므로

$$\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x} = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

따라서

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - (\mathrm{e}-1) + E = 2 - \mathrm{e} + E.$$

(다른 방법으로, $\frac{x^2}{1+x} = x - \frac{x}{1+x}$로 쓰고 첫 번째 결과를 바로 이용해도 된다. $1-(\mathrm{e}-1-E)$를 계산하면 같은 답이 나온다.)

소문항 (i)

다루기 까다로운 부분은 지수이므로, 이것을 새로운 변수로 삼는다.

$$u = \frac{1-x}{1+x}.$$

x에 대하여 풀면 $u(1+x) = 1-x$이므로 $x = \dfrac{1-u}{1+u}$이다. 그러면

$$1 + x = \frac{2}{1+u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{-(1+u)-(1-u)}{(1+u)^2} = -\frac{2}{(1+u)^2}.$$

$x=0$일 때 $u=1$이고, $x=1$일 때 $u=0$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \mathrm{e}^u \cdot \frac{1+u}{2} \cdot \left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = E.\end{aligned}$$

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$에서 나온 음의 부호는 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어 다시 증가하는 순서로 만드는 데 쓰였다.

? **생각해 보기** 왜 답이 e가 전혀 없이 정확히 E가 되리라고 예상할 수 있을까?

사상(map) $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$는 $[0,1]$을 자기 자신으로 보내고(양 끝점을 서로 바꾼다), 인수 $\frac{1}{1+x}$는 $\mathrm{d}x$와 결합하여 정확히 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$가 된다. 실제로 $\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$이며, 이것은 전체 계산을 기억하는 깔끔한 방법이다.

소문항 (ii)

이번에는 목표 구간 $[0,1]$이 $x \in [1,\sqrt{2}]$에서 나와야 하는데, 이 구간에서 x^2은 1부터 2까지 변한다. 그래서 다음과 같이 시도한다.

$$u = x^2 - 1, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,$$

이때 $x=1$에서 $u=0$이고 $x=\sqrt{2}$에서 $u=1$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)}, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^u,$$

이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}E}{2}.$$

? **생각해 보기** 왜 $u = x^2$으로 치환하지 않을까?

그렇게 해도 되며, 그러면 $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$를 얻는다. 하지만 구간이 $[0,1]$이 아니라 $[1,2]$이다. $u \mapsto u-1$로 1만큼 평행이동하면 같은 답에 도달한다. $u = x^2 - 1$은 단지 이 두 단계를 한 번에 처리하는 것이다.

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $E \approx 1.125386$이다. 수치적으로 첫 번째 적분은 $0.592896 = \mathrm{e} - 1 - E$, 두 번째 적분은 $0.407104 = 2 - \mathrm{e} + E$, (i)의 적분은 $1.125386 = E$, (ii)의 적분은 $1.529558 = \frac{1}{2}\mathrm{e}E$이다. 컴퓨터 없이 빠르게 타당성을 확인할 수도 있다. 처음 두 피적분함수는 모두 양수이고, 실제로 $\mathrm{e} - 1 - E \approx 0.59 > 0$이며 $2 - \mathrm{e} + E \approx 0.41 > 0$이다. 또한 $[0,1]$에서 $x^2 \le x$이므로 두 번째 적분이 첫 번째 적분보다 작아야 하는데, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- (i)에서 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것을 잊어버리거나 음의 부호를 빠뜨려 $-E$를 얻는 실수. 피적분함수가 양수이므로 이는 불가능한 답이다.
- (ii)에서 $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u}$로부터 나오는 인수 e나, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$로부터 나오는 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

E와 같은 적분은 **지수적분**(*exponential integral*) $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$와 관련이 있다. $t = 1 + x$로 치환하면 $E = \mathrm{e}^{-1}\big(\mathrm{Ei}(2) - \mathrm{Ei}(1)\big)$임을 알 수 있다. 리우빌(Liouville)의 이론에 따르면 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$는 초등함수인 부정적분(antiderivative)을 갖지 않는다. 바로 이 때문에 문제에서 E를 이름 붙은 상수로 다루고, 모든 것을 E로 환원하라고 요구하는 것이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 성격의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.