풀이

STEP I 2011, 문제 12

확률과 통계 • 대기열과 투표 문제

STEP I 2011, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.10 절 **언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/ballot.html

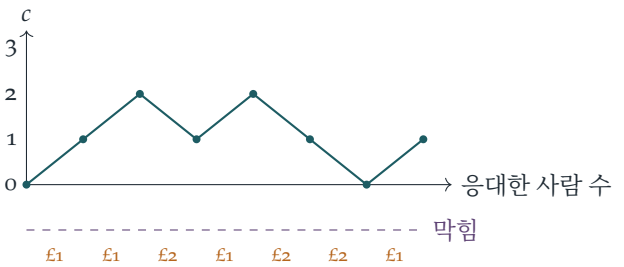
핵심 아이디어

하나의 수만 추적하면 된다. 바로 내가 들고 있는 £1 동전의 개수이다. £1을 내는 손님은 그 수를 하나 늘리고, £2를 내는 손님은 하나 줄인다(받은 £2 동전은 거스름돈으로 쓸 수 없으므로 그냥 가지고 있는다). 내가 꼼짝 못 하게 되는 것은 정확히 £2 손님이 왔는데 내게 £1 동전이 하나도 없을 때이다. £2 손님이 몇 명뿐이라면 위험은 모두 줄의 앞부분에 몰려 있으므로, 처음 몇 사람을 살펴보고 각 시작 방식이 어떤 상황을 남기는지 따져 본다.

풀이

중요한 것은 줄에 선 동전의 배열 패턴뿐이고, 사람이 누구인지는 상관없다. 사람들의 모든 배열이 같은 확률로 일어나므로, 주어진 자리에 서는 사람은 아직 배치되지 않은 사람 가운데 누구든 같은 확률을 가진다. 따라서 줄을 앞에서부터 차례로 만들어 갈 수 있다. £1 동전을 가진 사람이 a명, £2 동전을 가진 사람이 b명 남아 있다면, 다음 사람이 £1 동전을 가졌을 확률(probability)은 $\frac{a}{a+b}$이고 £2 동전을 가졌을 확률은 $\frac{b}{a+b}$이다.

내가 가진 £1 동전의 개수를 c라 하자. 모든 사람에게 팔 수 있을 필요충분조건은 c가 0 아래로 내려갈 필요가 전혀 없는 것이다. 즉 줄의 어느 시점에서든 지금까지 응대한 £1 손님의 수가 £2 손님의 수 이상이어야 한다.



그림은 성공하는 줄을 보여 준다. c의 경로가 점선에 한 번도 닿지 않는다.

소문항 (i)

£2 손님이 한 명이면, 막히는 유일한 경우는 그 사람이 줄의 맨 앞에 서서 내게 거스름돈이 전혀 없을 때이다. 다른 누군가가 맨 앞에 서면, £2 손님이 도착할 무렵 나는 적어도 하나의 £1 동전을 가지고 있다. £2 손님은 $m+1$개의 자리 중 어느 곳에나 같은 확률로 서므로

$$\mathrm{P}(\text{모두에게 판매}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

소문항 (ii)

£1 손님을 1, £2 손님을 2로 쓰고, 줄의 시작 방식을 나열해 보자.

- 첫 사람이 2이면 곧바로 막힌다.
- 줄이 1, 2, 2로 시작하면 c는 1, 0으로 변하고, 세 번째 사람에서 막힌다.
- 줄이 1, 1로 시작하면 두 사람 뒤에 $c = 2$이다. £2 손님은 모두 두 명뿐이고 c는 그중 한 명을 응대할 때만 줄어들므로, c는 결코 $2 - 2 = 0$ 아래로 내려가지 않는다. 성공이다.
- 줄이 1, 2, 1로 시작하면 c는 1, 0, 1로 변하고, £2 손님은 한 명만 남으므로 c는 결코 0 아래로 내려가지 않는다. 성공이다.

이 경우들이 모든 가능성을 다루므로, 모든 사람에게 팔 수 있는 것은 정확히 줄이 1, 1 또는 1, 2, 1로 시작할 때이다. 줄을 앞에서부터 만들어 가면

$$\mathrm{P}(1,1) = \frac{m}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m+1}, \quad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m}{m+2} \cdot \frac{2}{m+1} \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+1)}.$$

이 사건들은 서로 배반(disjoint)이므로

$$\mathrm{P}(\text{모두에게 판매}) = \frac{m(m-1)+2(m-1)}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m+2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (마지막 인수에서 £1 손님이 $m-1 \geq 1$명 남아 있으려면 $m \geq 2$가 필요하다.)

소문항 (iii)

이제 £2 손님이 세 명이다. 다시 처음 세 사람을 살펴보자.

- 2로 시작하거나 1, 2, 2로 시작하면: (ii)와 똑같이 막힌다.
- 1, 1, 1로 시작하면: $c = 3$이고, 세 명의 £2 손님은 최악의 경우에도 c를 0까지만 낮출 수 있다. 성공이다.
- 1, 1, 2 또는 1, 2, 1로 시작하면: 두 경우 모두 세 사람 뒤에 $c = 1$이고, 남은 것은 £1 동전을 가진 $m-2$명과 £2 동전을 가진 2명이 무작위 순서로 선 줄이다.

? **생각해 보기** 마지막 경우에, 나머지 줄은 언제 실패하는가?

$c = 1$로 나머지 줄을 시작하는 것은, £2 손님이 두 명인 줄의 맨 앞에 £1 손님 한 명이 공짜로 서 있는 것과 같다. 즉 모습을 바꾼 소문항 (ii)이다. $c = 1$이고 £2 손님이 두 명만 남았을 때, 막히는 것은 정확히 다음 두 사람이 모두 £2 손님일 때이다. c가 0이 된 뒤 응대할 수 없게 된다. 다음 두 사람 중 누구라도 £1 동전을 가졌다면 c는 결코 0 아래로 내려가지 않는다((ii)에서처럼 1, ...와 2, 1, ...를 확인해 보라). 처음 세 사람 이후 남은 m명 가운데에서

$$\mathrm{P}(\text{다음 두 명이 모두2}) = \frac{2}{m}\cdot\frac{1}{m-1},$$
$$\text{따라서}\quad \mathrm{P}(\text{나머지 성공}) = 1 - \frac{2}{m(m-1)} = \frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)},$$

이다. 여기서 $m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$을 이용했다.

$D = (m+3)(m+2)(m+1)$이라 하자. 쓸모 있는 시작 방식들의 확률은

$$\mathrm{P}(1,1,1) = \frac{m(m-1)(m-2)}{D},$$
$$\mathrm{P}(1,1,2) = \frac{m\cdot(m-1)\cdot 3}{D},\qquad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m\cdot 3\cdot(m-1)}{D}.$$

이다. 시작 방식들은 서로 배반이고, 어떤 방식으로 시작하든 나머지 줄은 다시 무작위 순서이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{성공}) &= \frac{m(m-1)(m-2)}{D} + \frac{6m(m-1)}{D}\cdot\frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)}\\ &= \frac{(m-2)\big[m(m-1)+6(m+1)\big]}{D} = \frac{(m-2)(m^2+5m+6)}{D}\\ &= \frac{(m-2)(m+2)(m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)} = \frac{m-2}{m+1},\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (여기서 $m \geq 3$이면 $m-1 \geq 2$이므로 조건부 확률(conditional probability)이 의미를 가진다.)

검산

- 가장 작은 경우: $m = n$이면 공식은 $n = 1, 2, 3$에 대해 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$를 준다. $m = n = 2$일 때 1과 2의 여섯 가지 패턴은 같은 확률로 일어나고, 그중 1122와 1212만 성공하므로 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다. ✓
- m이 클 때: 세 확률 모두 1로 수렴하는데, £1 동전이 넉넉할 때 마땅히 그래야 한다.
- 줄의 순서를 모두 나열해 보면, $m = 5$일 때 $n = 1, 2, 3$에 대해 $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$를 얻으며, 이는 $\frac{m}{m+1}$, $\frac{m-1}{m+1}$, $\frac{m-2}{m+1}$와 일치한다. 또한 14 이하의 모든 m에 대해 공식이 정확히 맞는지도 확인했다.

흔한 실수

- 받은 £2 동전은 거스름돈으로 쓸 수 없다는 사실을 잊는 것. £1 동전만 셈에 들어간다.
- 사람들을 고정된 확률 $\frac{m}{m+n}$을 가진 독립적인 추출로 취급하는 것. 줄은 비복원추출(without replacement)로 만들어지므로, 사람이 배치될 때마다 확률이 바뀐다.
- (iii)에서 세 사람 뒤에 $c = 1$이면 언제나 안전하다고 가정하여, 1, 1, 2, 2, 2나 1, 2, 1, 2, 2와 같은 실패를 놓치는 것.

STEP 너머

일반적으로 모든 $n \leq m$에 대해 확률은 $\frac{m+1-n}{m+1}$이다. 이것이 **투표 문제**(ballot problem)이며, 가장 깔끔한 증명은 **반사 원리**(reflection principle)를 이용한다. 막히는 수준에 닿는 경로를 반사하면 다른 곳에서 끝나는 경로를 얻게 되고, 이로써 나쁜 줄의 개수가 하나의 이항계수(binomial coefficient)로 바뀐다. $m = n$일 때 좋은 줄의 개수는 카탈랑 수(Catalan number)인데, 이 수는 조합론 곳곳에 등장한다. 랜덤 워크(random walk)와 반사 원리에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.