풀이

# STEP I 2011, 문제 11

역학 • 강체의 평형

**STEP I 2011, 11번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

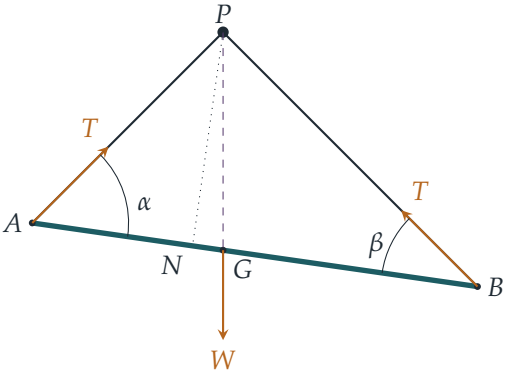
step.maths.org/questions/11-s1-q11

## 핵심 아이디어

막대에 작용하는 힘은 세 개뿐이다. $A$와 $B$에서의 두 줄의 장력(tension)과 $G$에 작용하는 무게이다. 못이 매끄러우므로(smooth) 두 장력은 크기가 같고, 따라서 무게가 모멘트를 갖지 않는 점 $G$에 대하여 모멘트(moment)를 취하면 곧바로 두 각 사이의 관계를 얻는다. 둘째 부분에서 추가로 필요한 사실은, 평형(equilibrium) 상태에 있고 모두 평행하지는 않은 세 힘은 한 점을 지나야 한다는 것이다. 여기서 그 점은 못이므로 $PG$는 연직이다.

## 풀이

막대는 강체 막대(rigid rod)로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 못은 매끄러운 것으로 모형화한다. 막대의 무게를 $W$라 하자.



### $3\sin\alpha = 4\sin\beta$임을 보이기

줄은 가볍고 매끄러운 못에 걸쳐 있으므로 장력 $T$는 줄 전체에서 같다. 따라서 막대에는 $A$에서 $AP$ 방향으로 크기 $T$인 힘이, $B$에서 $BP$ 방향으로 크기 $T$인 힘이 작용하고, 또 $G$에서 연직으로 $W$가 작용한다.

$G$에 대한 모멘트를 취한다. 무게는 모멘트를 갖지 않는다. $GB = 7d - 3d = 4d$이므로, $G$에서 직선 $AP$까지의 수직 거리는 $AG\sin\alpha = 3d\sin\alpha$이고, $G$에서 직선 $BP$까지의 수직 거리는 $GB\sin\beta = 4d\sin\beta$이다. $A$에서의 장력은 막대를 $G$에 대하여 한쪽으로 돌리고 $B$에서의 장력은 반대쪽으로 돌리므로, 평형이려면

$$T\cdot 3d\sin\alpha = T\cdot 4d\sin\beta \quad\Longrightarrow\quad 3\sin\alpha = 4\sin\beta,$$

이어야 하고, 이것이 보이려던 식이다($Td \neq 0$으로 나누었다).

### 줄의 길이

$\cos\beta = \frac{4}{5}$이면 $\sin\beta = \frac{3}{5}$이다($\beta$는 삼각형의 한 각이므로 $\sin\beta > 0$). 그러면

$$\sin\alpha = \tfrac{4}{3}\sin\beta = \tfrac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5},$$

이다. 여기서 $\alpha$가 예각이므로 양의 근을 택하였다. 이제

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = 0,$$

이고 $0 < \alpha+\beta < \pi$이므로 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 삼각형 $PAB$는 $P$에서 직각이고 빗변은 $AB = 7d$이다. 그러므로

$$PA = 7d\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d, \qquad PB = 7d\cos\beta = \tfrac{28}{5}d,$$

이고, 줄의 길이는

$$PA + PB = \tfrac{49}{5}d.$$

이다.

### 막대의 기울기

**?** **생각해 보기** 막대에 대한 $P$의 위치는 알지만, "연직"은 어느 방향인가?

두 장력은 $P$를 지나는 직선을 따라 작용하므로, 그 합력도 $P$를 지나며 작용한다. 평형이려면 이 합력이 무게와 균형을 이루어야 하므로, $W$와 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 위에 있어야 한다(평형 상태에 있는 평행하지 않은 세 힘은 한 점에서 만난다(concurrent)). 따라서 $G$를 지나는 연직선은 $P$를 지난다. 즉 $PG$는 **연직이다**.

$P$에서 $AB$에 내린 수선의 발을 $N$이라 하자. 직각삼각형 $PAN$에서

$$AN = PA\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{63}{25}d, \qquad PN = PA\sin\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{84}{25}d.$$

이다. $AN = \frac{63}{25}d < 3d = AG$이므로 점 $N$은 $A$와 $G$ 사이에 있고,

$$NG = 3d - \tfrac{63}{25}d = \tfrac{12}{25}d.$$

이다. 직각삼각형 $PNG$에서

$$\tan\angle PGN = \frac{PN}{NG} = \frac{84}{12} = 7.$$

이다. 각 $PGN$은 막대와 연직선 $GP$ 사이의 각을 $A$ 쪽에서 잰 것이다. 이 각은 예각이므로 끝점 $A$는 $G$를 지나는 수평선보다 위에, $B$는 그 아래에 있으며, 이는 주어진 배치와 일치한다. 막대와 수평선 사이의 각 $\theta$는 $\frac{\pi}{2} - \angle PGN$이므로

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\angle PGN} = \frac{1}{7}, \qquad \text{즉,} \qquad \theta = \arctan\tfrac{1}{7},$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

## 검산

- 줄의 길이 $\frac{49}{5}d = 9.8d$는 막대의 길이 $7d$보다 길며, 이는 삼각형 $PAB$에서 삼각부등식(triangle inequality)이 요구하는 바와 같다.
- 크기가 같은 두 장력의 합력은 두 힘 사이의 각을 이등분하므로, $PG$는 각 $APB$를 이등분한다. 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)에 따라 $PA : PB$는 $AG : GB = 3 : 4$와 같아야 하고, 실제로 $\frac{21}{5} : \frac{28}{5} = 3 : 4$이다.
- 수치 검산으로, $P$를 $A$와 $B$를 초점으로 하는 타원(이 줄 길이에서 못이 놓일 수 있는 위치의 집합) 위에 놓고, $P$ 아래 $G$의 깊이가 정상값(stationary)을 갖는 기울기를 찾아보았다. 그 결과는 $8.13°$였으며, 이는 $\arctan\frac{1}{7} \approx 8.130°$와 일치한다.

## 흔한 실수

- 줄의 두 부분에 서로 다른 장력을 주는 것. 매끄러운 못은 가벼운 줄의 장력을 바꿀 수 없다.
- 거리를 바꾸어 $4\sin\alpha = 3\sin\beta$를 얻는 것. 더 긴 팔 $GB = 4d$는 $B$에서의 각과 짝을 이룬다.
- $\alpha$가 예각임을 잊고 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$를 허용하는 것. 그러면 다른 삼각형이 되고, 그 삼각형에서 $\alpha + \beta$는 직각이 아니다.

## STEP 너머

줄의 길이가 고정되어 있으면 못은 $A$와 $B$를 초점(foci)으로 하는 타원(ellipse) 위에 있어야 한다. 그러면 $PG$가 각 $APB$를 이등분한다는 사실은 바로 타원의 반사 성질이다. 즉 $P$에서의 법선은 두 초점 반지름 사이의 각을 이등분한다. 또한 평형 위치는 정확히 퍼텐셜 에너지(potential energy)가 정상값을 갖는 위치이며, 이것은 대학 1학년 과정에서 배우는 가상일의 원리(principle of virtual work)와 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 평형, 토크(torque), 에너지 방법에 대해 읽기 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.