풀이

STEP I 2011, 문제 10

역학 • 탄성 충돌

> **STEP I 2011, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q10

핵심 아이디어

두 입자는 같은 지점에서 정지 상태로 출발하고, 놓은 순간부터 충돌할 때까지 일어나는 일(자유 낙하(free fall), 완전 탄성(perfectly elastic) 반사) 가운데 에너지를 잃는 것은 없다. 따라서 어떤 높이에서든 두 입자의 속력은 같고, 두 입자는 같은 높이에서 만난다. 그 뒤의 충돌은 두 식(운동량(momentum) 보존과 $e = 1$인 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution))으로 푸는 전형적인 문제이고, B의 최고 높이는 다시 한 번 에너지로부터 얻어진다.

풀이

A와 B를 입자로 모형화하고, 공기 저항(air resistance)은 무시하며, 처음부터 끝까지 위쪽을 양의 방향으로 잡는다.

속력이 같은 이유

각 입자는 높이 h에서 정지 상태로 출발한다. 공중에 떠 있는 동안에는 중력만 작용하므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 또 평면에서 A가 튀어 오르는 것은 완전 탄성 반사이므로, A의 속도의 방향만 바꿀 뿐 속력은 바꾸지 않고, 여기서도 에너지 손실은 없다. 그러므로 첫 충돌까지 각 입자의 단위 질량당 총에너지는 gh이고, 높이 y에 있는 입자의 속력 v는 다음을 만족한다.

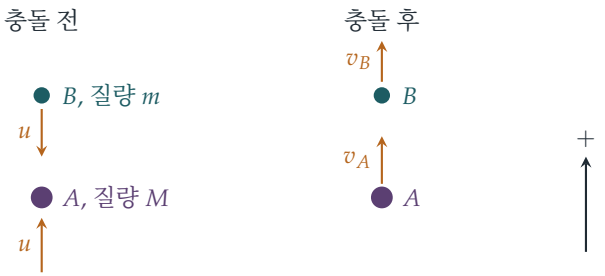
$$\tfrac{1}{2}v^2 + gy = gh, \qquad \text{따라서} \qquad v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

속력은 높이에만 의존하며, 질량이나 입자가 지나온 경로에는 의존하지 않는다. 첫 충돌의 순간 두 입자는 같은 높이 y에 있으므로 속력이 같다. 게다가 A는 아직 P로 돌아오지 않았

으므로 $y < h$이고, 이 공통 속력 $u = \sqrt{2g(h-y)}$는 양수이다. A는 이미 튀어 올랐으므로 위로 움직이고 있고, B는 (한 번도 튀어 오르지 않았으므로) 아래로 움직이고 있다.

충돌

충돌 직전 A의 속도는 $+u$이고 B의 속도는 $-u$이다. 충돌 직후의 속도를 각각 v_A와 v_B라 하자.



충돌에서 생기는 충격력은 두 입자 사이의 내력이고, 충돌하는 순간 동안 중력이 주는 충격량(impulse)은 없으므로 운동량이 보존된다.

$$Mu - mu = Mv_A + mv_B. \tag{1}$$

충돌은 완전 탄성($e = 1$)이므로, 멀어지는 속력은 가까워지는 속력과 같다.

$$v_B - v_A = u - (-u) = 2u. \tag{2}$$

(2)에서 얻은 $v_B = v_A + 2u$를 (1)에 대입하면

$$(M-m)u = (M+m)v_A + 2mu \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{(M-3m)u}{M+m},$$

이고, 따라서

$$v_B = v_A + 2u = \frac{(M-3m)u + 2(M+m)u}{M+m} = \frac{(3M-m)u}{M+m}.$$

이다. $M > 3m$이므로 $M - 3m > 0$이고, 따라서 $v_A > 0$이다. 또한 $v_B = v_A + 2u > 0$이다. 그러므로 요구한 대로 첫 충돌 후 두 입자는 모두 위로 움직인다.

생각해 보기 B가 다음에 A와 만나기 전에 실제로 비행의 최고점에 도달한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

충돌 후 두 입자의 가속도는 모두 $-g$이므로, 둘 다 공중에 있는 동안 상대 속도(relative velocity)는 $v_B - v_A = 2u$로 일정하다. 즉 B는 일정한 비율로 A로부터 멀어지고, A가 다음에 평면에 부딪히기 전에는 두 입자가 만날 수 없다. B가 아직 올라가고 있는 동안 A가 튀어

오르는 경우에는 단위 질량당 에너지를 비교해 보자. B의 에너지는 $\frac{1}{2}v_B^2 + gy$이고 A의 에너지는 $\frac{1}{2}v_A^2 + gy$인데, $v_B > v_A > 0$이므로 후자가 더 작다(그리고 A가 튀어 오를 때 에너지는 유지된다). 따라서 두 입자가 같은 높이에 있을 때마다 A의 속력은 B의 속력보다 작다. B가 아직 올라가고 있는 동안 아래에서 B를 따라잡으려면, 만나는 순간 A는 적어도 B만큼 빠르게 올라가고 있어야 하는데, 방금 본 것처럼 그럴 수 없다. 그러므로 두 번째 충돌은 B가 최고점을 지난 뒤에야 일어나고, 그 최고점이 바로 문제에서 묻는 최고 높이이다.

B의 최고 높이

충돌은 $u^2 = 2g(h-y)$를 만족하는 높이 y에서 일어난다. 즉

$$y = h - \frac{u^2}{2g}.$$

이다. 충돌 후 B는 처음 속력 v_B로 중력만 받으며 올라가므로, ($v = 0$일 때의 $v^2 = v_B^2 - 2gs$로부터) $v_B^2/(2g)$만큼 더 올라간다. 따라서 최고 높이는

$$\begin{aligned} y + \frac{v_B^2}{2g} &= h - \frac{u^2}{2g} + \frac{(3M-m)^2u^2}{2g(M+m)^2} \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}\left[(3M-m)^2 - (M+m)^2\right] \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}(2M-2m)(4M) \\ &= h + \frac{4M(M-m)u^2}{(M+m)^2 g}, \end{aligned}$$

이다. 셋째 줄에서는 제곱의 차 공식을 썼다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 에너지: 위에서 구한 v_A와 v_B에 대해 $Mv_A^2 + mv_B^2 = (M+m)u^2$이고, 이는 탄성 충돌이 요구하는 바와 같다.
- 극한의 경우: $m \to 0$이면 $v_A \to u$, $v_B \to 3u$이고(매우 가벼운 공은 무거운 공에 부딪혀 움직이는 벽에 부딪힌 것처럼 튕겨 나가며, 그 공에 대해 상대 속도 $2u$로 멀어진다), 높이는 $h + 4u^2/g$가 되어 $y + 9u^2/(2g)$와 일치한다.
- $M > m$이므로 추가로 올라간 높이는 양수이다. 즉 B는 A로부터 에너지를 얻었으므로, 당연히 P보다 높이 올라간다.
- 수치적으로, $M > 3m$을 만족하는 무작위 질량과 무작위 h에 대해 무작위 시각에 B를 놓고, (A가 그 뒤에 튀어 오르는 것까지 포함하여) 두 번째 충돌까지 운동을 단계별로 계산해 보았더니, B의 최고 높이가 상대 오차 약 10^{-10} 이내로 공식과 일치하였다.

흔한 실수

- 부호 오류: 충돌 전 두 속도를 모두 $+u$로 잡으면 A가 올라가는 동안 B는 떨어지고 있다는 사실을 잊은 것이다.
- 추가로 올라가는 높이 $v_B^2/(2g)$를 충돌 높이 $h - u^2/(2g)$가 아니라 평면이나 P에서부터 재는 실수.

STEP 너머

속력이 높이에만 의존한다는 논증은 보존력(conservative force)에 대한 에너지 보존이다. 즉 어떤 점에서의 속력은 그 점의 퍼텐셜 에너지(potential energy)에만 의존하고, 지나온 경로에는 의존하지 않는다. 충돌 자체는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 것이 가장 쉬운 경우가 많은데, 이 좌표계에서 탄성 충돌은 각 입자의 속도를 단순히 반대로 바꿀 뿐이다. 원래 좌표계로 되돌리면 v_A와 v_B를 한 줄로 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.